

3つの円の共通弦

3つの円がそれぞれ2点で交わる時、3つの共通弦は1点で交わるか、または平行になる。

証明

(i) 3つの円の中心 P, Q, R が一直線上にないとき

円 Q, R の共通弦 AA' と円 R, P の共通弦 BB' の交点を D, 円 P, Q の交点のひとつを C とする。直線 CD が円 P, Q と交わる点をそれぞれ C', C'' とする。円 R, P, Q のそれぞれについて、方べきの定理を用いると

$$DA \cdot DA' = DB \cdot DB'$$

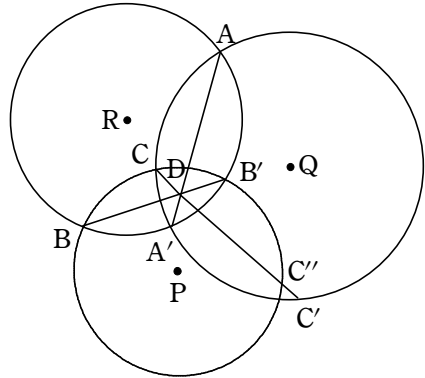
$$DB \cdot DB' = DC \cdot DC'$$

$$DA \cdot DA' = DC \cdot DC''$$

よって $DC \cdot DC' = DC \cdot DC''$ であるから

$$DC' = DC''$$

すなわち C' と C'' は一致するから3つの共通弦は1点で交わる。



(ii) 3つの円の中心 P, Q, R が一直線上にあるとき

3つの共通弦は3つの中心を通る直線に垂直であるから、平行である。

