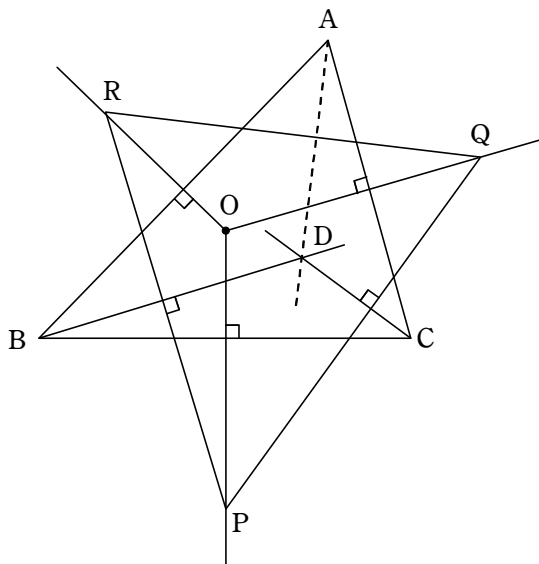


定理 点Oから $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, ABに垂線をひき, その垂線上にそれぞれ点 P, Q, Rをとる。このとき, A, B, C からそれぞれ直線 QR, RP, PQ へひいた垂線は1点で交わる。



証明 点 B, C からそれぞれ直線 RP, PQ へひいた垂線の交点をDとするとき, AD と RQ が垂直となることを示せばよい。Oを基準とする位置ベクトルを

$$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d}), P(\vec{p}), Q(\vec{q}), R(\vec{r})$$

とおく。 $\overline{OP} \perp \overline{BC}$, $\overline{OQ} \perp \overline{CA}$, $\overline{OR} \perp \overline{AB}$ であるから

$$\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \quad \vec{q} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0, \quad \vec{r} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\therefore \vec{b} \cdot \vec{p} = \vec{c} \cdot \vec{p}, \quad \vec{c} \cdot \vec{q} = \vec{a} \cdot \vec{q}, \quad \vec{a} \cdot \vec{r} = \vec{b} \cdot \vec{r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また, $\overline{BD} \perp \overline{RP}$, $\overline{CD} \perp \overline{PQ}$ であるから

$$(\vec{d} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{r}) = 0, \quad (\vec{d} - \vec{c}) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) = 0$$

$$\therefore \vec{d} \cdot (\vec{p} - \vec{r}) = \vec{b} \cdot (\vec{p} - \vec{r}), \quad \vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{c} \cdot (\vec{q} - \vec{p})$$

辺々足し合わせ, ①を用いると

$$\vec{d} \cdot (\vec{p} - \vec{r}) + \vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{b} \cdot (\vec{p} - \vec{r}) + \vec{c} \cdot (\vec{q} - \vec{p})$$

$$\vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{r}) = \vec{b} \cdot \vec{p} - \vec{c} \cdot \vec{p} + \vec{c} \cdot \vec{q} - \vec{b} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{q} - \vec{a} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{r}) = \vec{a} \cdot (\vec{q} - \vec{r})$$

したがって $(\vec{d} - \vec{a}) \cdot (\vec{q} - \vec{r}) = 0$ すなわち $\overline{AD} \perp \overline{RQ}$

(証明終)