

問題 円 O の内部の点 A を通る弦 BC の両端 B, C における 2 本の接線の交点を P とする。
 A を通りながら BC が変化するとき、 P は直線上にあることを示せ。ただし、 A は O と異なり、 BC は O を通らないものとする。

証明 中心 O を原点とし、 OA にそって x 軸をとる。円の半径を r 、 A の座標を $(a, 0)$ 、
 OP と BC の交点を Q とする。

直角三角形 OPB と OBQ において、

2 組の角が等しいから

$$\triangle OPB \sim \triangle OBQ$$

$$OP : OB = OB : OQ$$

$$\text{よって } OP \cdot OQ = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

OP が x 軸となす角を θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)

とすると

$$OQ = OA \cos \theta = a \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

P から x 軸に垂線をひき交点を H とすると

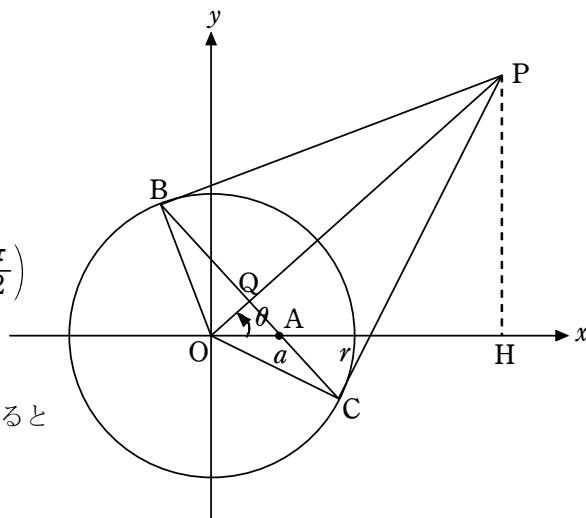
①, ② から

$$OP \cdot a \cos \theta = r^2$$

$$\text{よって } OP \cos \theta = OH = \frac{r^2}{a}$$

すなわち P は、 H を通り x 軸に垂直な直線 $x = \frac{r^2}{a}$ 上にある。

(証明終)



補足 $OP \cdot OQ = r^2$ であるから、 P と Q は円 O について反転の関係にある。また、 A の反転は H である。 Q は OA を直径とする円を描くから、この円の反転は H を通り OA に垂直な直線である。