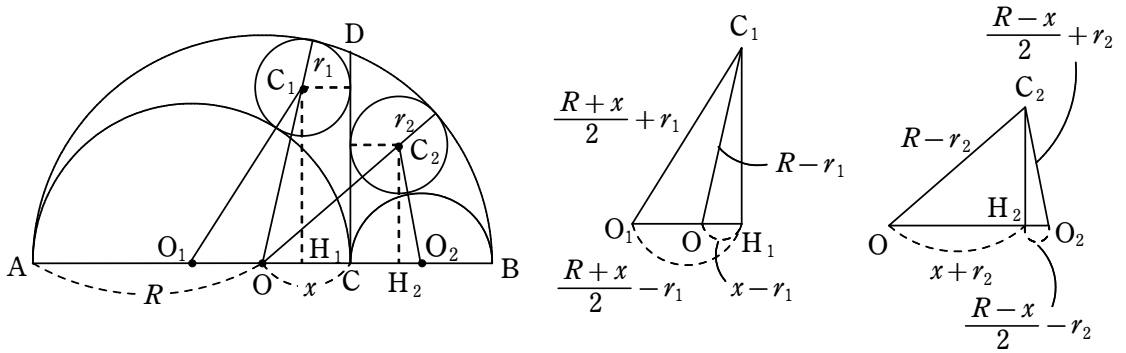


アルペーロスの問題

参照：「図形の証明のおもしろ問題」上垣 渉『数学教育』2010年11月号 p.80

線分 AB 上に点 C をとり、 AB , AC , CB を直径とする 3 つの半円を同じ側につくる。 C を通り AB に垂直な直線と半円 AB との交点を D とする。 2 つの円がそれぞれ、半円 AB と線分 CD 、および半円 AC , CB の一方に接するとき、この 2 つの円は等しいことを証明せよ。



証明 半円 AB , AC , CB の中心をそれぞれ O , O_1 , O_2 とする。図のように C が OB 上にあるとして、 $OA=R$, $OC=x$ とすると、半円 O_1 , O_2 の半径はそれぞれ $\frac{R+x}{2}$, $\frac{R-x}{2}$ となる。

半円 O_1 , O_2 に接する円の中心をそれぞれ C_1 , C_2 , 半径を r_1 , r_2 とし、 C_1 , C_2 から AB に垂線をひき、交点をそれぞれ H_1 , H_2 とする。

円 C_1 は半円 O に内接し、半円 O_1 に外接し、 CD に接するから

$$C_1O = R - r_1, \quad C_1O_1 = \frac{R+x}{2} + r_1,$$

$$O_1H_1 = O_1C - H_1C = \frac{R+x}{2} - r_1, \quad OH_1 = OC - H_1C = x - r_1$$

$\triangle O_1C_1H_1$, $\triangle OC_1H_1$ においてピタゴラスの定理を用いると

$$C_1H_1^2 = \left(\frac{R+x}{2} + r_1\right)^2 - \left(\frac{R+x}{2} - r_1\right)^2 = (R-r_1)^2 - (x-r_1)^2$$

$$2(R+x)r_1 = R^2 - x^2 - 2(R-x)r_1 \quad \text{ゆえに} \quad r_1 = \frac{R^2 - x^2}{4R}$$

円 C_2 についても同様にして、 $\triangle O_2C_2H_2$, $\triangle OC_2H_2$ においてピタゴラスの定理を用いると

$$C_2H_2^2 = \left(\frac{R-x}{2} + r_2\right)^2 - \left(\frac{R-x}{2} - r_2\right)^2 = (R-r_2)^2 - (x+r_2)^2$$

$$2(R-x)r_2 = R^2 - x^2 - 2(R+x)r_2 \quad \text{ゆえに} \quad r_2 = \frac{R^2 - x^2}{4R}$$

$$\text{したがって} \quad r_1 = r_2$$

(証明終)

参考 円の直径を d とすると $d = \frac{CD^2}{AB}$