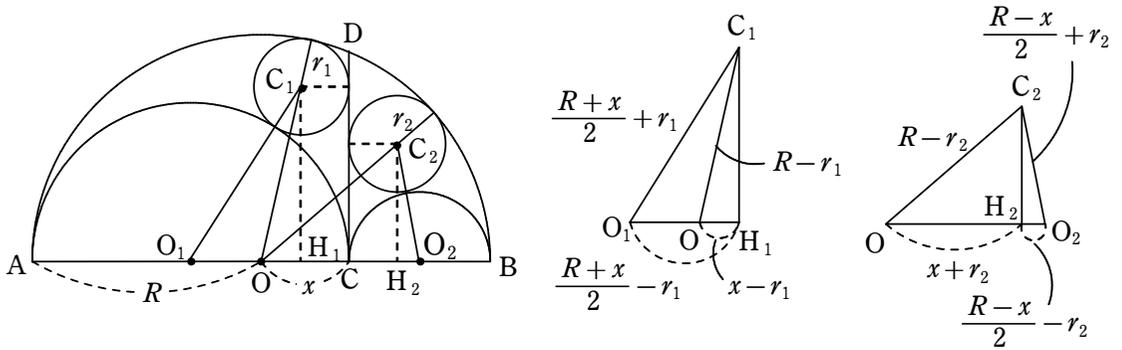


## アルペーロスの問題

参照：「図形の証明のおもしろ問題」上垣 渉『数学教育』2010年11月号 p.80

線分 AB 上に点 C をとり、AB, AC, CB を直径とする 3 つの半円を同じ側につくる。C を通り AB に垂直な直線と半円 AB との交点を D とする。2 つの円がそれぞれ、半円 AB と線分 CD, および半円 AC, CB の一方に接するとき、この 2 つの円は等しいことを証明せよ。



**証明** 半円 AB, AC, CB の中心をそれぞれ O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> とする。図のように C が OB 上にあるとして、OA = R, OC = x とすると、半円 O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> の半径はそれぞれ  $\frac{R+x}{2}$ ,  $\frac{R-x}{2}$  となる。

半円 O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> に接する円の中心をそれぞれ C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, 半径を r<sub>1</sub>, r<sub>2</sub> とし、C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> から AB に垂線をひき、交点をそれぞれ H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub> とする。

円 C<sub>1</sub> は半円 O に内接し、半円 O<sub>1</sub> に外接し、CD に接するから

$$C_1O = R - r_1, \quad C_1O_1 = \frac{R+x}{2} + r_1,$$

$$O_1H_1 = O_1C - H_1C = \frac{R+x}{2} - r_1, \quad OH_1 = OC - H_1C = x - r_1$$

△O<sub>1</sub>C<sub>1</sub>H<sub>1</sub>, △OC<sub>1</sub>H<sub>1</sub> においてピタゴラスの定理を用いると

$$C_1H_1^2 = \left(\frac{R+x}{2} + r_1\right)^2 - \left(\frac{R+x}{2} - r_1\right)^2 = (R-r_1)^2 - (x-r_1)^2$$

$$2(R+x)r_1 = R^2 - x^2 - 2(R-x)r_1 \quad \text{ゆえに} \quad r_1 = \frac{R^2 - x^2}{4R}$$

円 C<sub>2</sub> についても同様にして、△O<sub>2</sub>C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>, △OC<sub>2</sub>H<sub>2</sub> においてピタゴラスの定理を用いると

$$C_2H_2^2 = \left(\frac{R-x}{2} + r_2\right)^2 - \left(\frac{R-x}{2} - r_2\right)^2 = (R-r_2)^2 - (x+r_2)^2$$

$$2(R-x)r_2 = R^2 - x^2 - 2(R+x)r_2 \quad \text{ゆえに} \quad r_2 = \frac{R^2 - x^2}{4R}$$

$$\text{したがって} \quad r_1 = r_2$$

(証明終)

**参考** 円の直径を d とすると  $d = \frac{CD^2}{AB}$