

丸山良寛の定理

四角形ABCD が円 O に内接するとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の内接円の半径をそれぞれ r_2, r_4 ,
 $\triangle ABD$ と $\triangle DBC$ の内接円の半径をそれぞれ r_1, r_3 とおくと次式が成り立つ。

$$r_2 + r_4 = r_1 + r_3$$

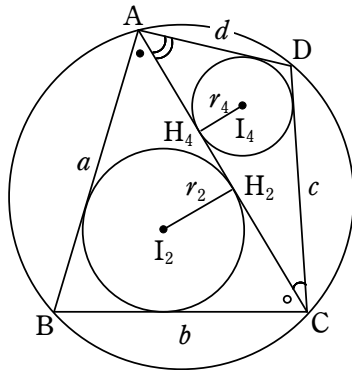


図 1

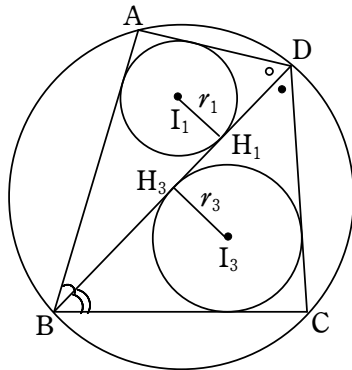


図 2

証明 図のように内接円の中心を I_2, I_4, I_1, I_3 , 接点を H_2, H_4, H_1, H_3 とおく。また、 $AB=a$,
 $BC=b, CD=c, DA=d, AC=x, BD=y$ とし、 $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD, \triangle DBC$ の周の長
 さをそれぞれ $2s_2, 2s_4, 2s_1, 2s_3$ とすると

$$H_2H_4 = AC - CH_2 - AH_4 = x - (s_2 - a) - (s_4 - c) = x - \frac{b+x-a}{2} - \frac{d+x-c}{2} = \frac{a-b+c-d}{2}$$

$$H_1H_3 = BD - DH_1 - BH_3 = y - (s_1 - a) - (s_3 - c) = y - \frac{d+y-a}{2} - \frac{b+y-c}{2} = \frac{a-b+c-d}{2}$$

ゆえに $H_2H_4 = H_1H_3$

次に $\angle BAC = \angle BDC, \angle ACB = \angle ADB$ であるから

$$r_2 : AH_2 = r_3 : DH_3, \quad r_2 : CH_2 = r_1 : DH_1$$

ゆえに $r_2 H_1H_3 = r_2 (DH_3 - DH_1) = r_3 AH_2 - r_1 CH_2 \dots\dots ①$

また、 $\angle DCA = \angle DBA, \angle DAC = \angle DBC$ から

$$r_4 : CH_4 = r_1 : BH_1, \quad r_4 : AH_4 = r_3 : BH_3$$

ゆえに $r_4 H_1H_3 = r_4 (BH_1 - BH_3) = r_1 CH_4 - r_3 AH_4 \dots\dots ②$

①+② から

$$(r_2 + r_4)H_1H_3 = r_3 AH_2 - r_1 CH_2 + r_1 CH_4 - r_3 AH_4 = r_1 (CH_4 - CH_2) + r_3 (AH_2 - AH_4) \\ = (r_1 + r_3)H_2H_4$$

$H_2H_4 = H_1H_3$ であるから $r_2 + r_4 = r_1 + r_3$ (証明終)