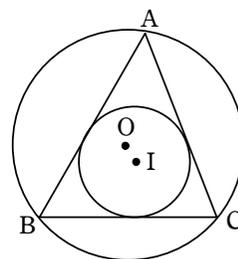


三角形の外接円と内接円の半径を含む公式

△ABCにおいて、頂点 A, B, C における内角を A, B, C , 対辺の長さを a, b, c , 外接円 O の半径を R , 内接円 I の半径を r , 面積を S とする。



正弦定理は
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

面積の公式は
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

これらから
$$r = \frac{abc}{2R(a+b+c)} = \frac{2R\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

ここで $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B)$, $\sin \frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi - C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) + \sin(A+B) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

したがって
$$r = \frac{2R \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad \text{より}$$

$$\frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

さらに $\sin \frac{C}{2} = \sin \frac{\pi - A - B}{2} = \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin A \cdot \frac{1}{2} \sin B - \frac{1 - \cos A}{2} \cdot \frac{1 - \cos B}{2} \\ &= \frac{1}{4} (\cos A + \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B - 1) \\ &= \frac{1}{4} \{ \cos A + \cos B - \cos(A+B) - 1 \} \\ &= \frac{1}{4} \{ \cos A + \cos B + \cos C - 1 \} \end{aligned}$$

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

前式は次式のように変形できる。

$$R+r=R \cos A+R \cos B+R \cos C$$

$\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ L , M , N とする。

$\triangle ABC$ が鋭角三角形のとき

$$R \cos A=OB \cos \angle BOL=OL$$

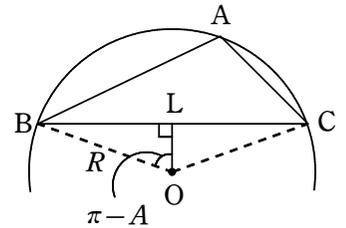
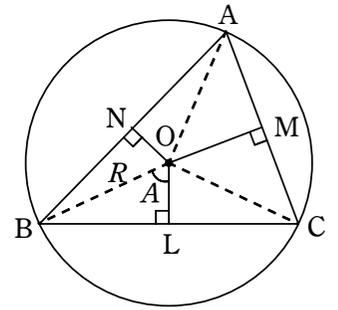
同様にして $R \cos B=OM$, $R \cos C=ON$

$\angle A$ が鈍角のとき

$$OL=OB \cos \angle BOL=R \cos (\pi-A)=-R \cos A$$

これらをまとめると、次のことがいえる。

$\triangle ABC$ が鋭角三角形のとき $R+r=OL+OM+ON$ $\angle A$ が鈍角のとき $R+r=-OL+OM+ON$



これを用いると次の定理が証明できる。

丸山良寛の定理：四角形 $ABCD$ が円 O に内接するとき、 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ の内接円の半径をそれぞれ r_2 , r_4 , r_1 , r_3 とおくと $r_2+r_4=r_1+r_3$ が成り立つ。

(丸山良寛は江戸時代の和算家)

証明 AB , BC , CD , DA , AC , BD の中点を

それぞれ K , L , M , N , H , J とする。

図 1 において、 $\angle D$ が鈍角であることを考慮すると

$$R+r_2=OK+OL+OH$$

$$R+r_4=OM+ON-OH$$

図 2 においても同様にして

$$R+r_1=OK+ON-OJ$$

$$R+r_3=OL+OM+OJ$$

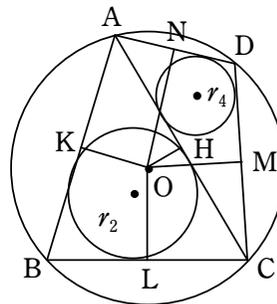


図 1

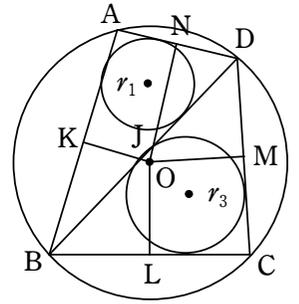


図 2

したがって $r_2+r_4=r_1+r_3=OK+OL+OM+ON-2R$ (証明終)

この定理は明治時代に三上義夫によって次のように一般化されたが、証明は同様である。

「円に内接する任意の多角形において、1 頂点を通る弦で分けられるすべての三角形の内接円の半径の和は、どの頂点に関しても等しく一定である。」