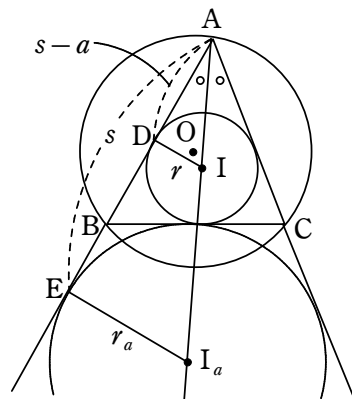


### 三角形の外接円と内接円の半径を含む公式その2

$\triangle ABC$  において、頂点  $A, B, C$  における内角を  $A, B, C$ ,  
 対辺の長さを  $a, b, c$ , 周の長さを  $2s = a + b + c$ , 面積を  $S$  とし,  
 外接円  $O$ , 内接円  $I$ , 傍接円  $I_a$  の半径を  $R, r, r_a$  とする。



正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  から

$$\begin{aligned} r &= (s-a) \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(-a+b+c) \tan \frac{A}{2} \\ &= R(-\sin A + \sin B + \sin C) \tan \frac{A}{2} \end{aligned}$$

ここで

$$\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin(B + C), \quad \sin \frac{B+C}{2} = \sin\left(\frac{\pi - A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

を用いると

$$\begin{aligned} -\sin A + \sin B + \sin C &= -\sin(B + C) + \sin\left(\frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}\right) + \sin\left(\frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}\right) \\ &= -2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \left( \cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

したがって  $r = R \cdot 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$  から

$$\frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$r_a$  についても同様にして

$$\begin{aligned} r_a &= s \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c) \tan \frac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) \tan \frac{A}{2} \\ &= R \cdot 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{r_a}{4R} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$\triangle ABC$  の辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  に接する傍接円の半径をそれぞれ  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  とする。直線  $AB$  と内接円  $I$ , 傍接円  $I_a$  との交点をそれぞれ  $D$ ,  $E$  とすると,  $\triangle ADI \sim \triangle AEI_a$  から

$$\frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s}, \quad \text{同様にして} \quad \frac{r}{r_b} = \frac{s-b}{s}, \quad \frac{r}{r_c} = \frac{s-c}{s}$$

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{3s - (a+b+c)}{s} = 1 \quad \text{すなわち}$$

$$\boxed{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \frac{r_a}{4R} + \frac{r_b}{4R} + \frac{r_c}{4R} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ &= \sin \frac{A}{2} \left( \cos \frac{B+C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) + \cos \frac{A}{2} \left( \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \\ &= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} \\ &= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r}{4R} + 1 \end{aligned}$$

したがって

$$\boxed{r_a + r_b + r_c - r = 4R}$$

上の計算から下左図で  $r_b + r_c = 4R \cos^2 \frac{A}{2} = 2R(1 + \cos A)$  が成り立つ。 $\triangle ABC$  が定円  $O$  に内接するとき  $A$  が弧  $BC$  上を動いても,  $r_b + r_c$  は一定である。また, 下右図で四角形  $ABCD$  が円  $O$  に内接するとき  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4R \cos^2 \frac{B}{2} + 4R \cos^2 \frac{\pi - B}{2} = 4R$  と一定となる。

