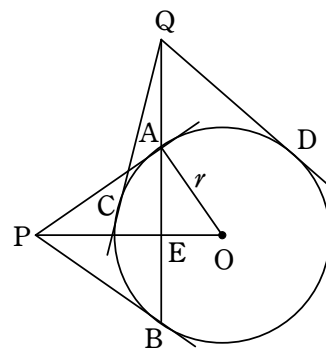


**問題**  $O$  を中心とする円の外に点  $P$  をとり、 $P$  から円  $O$  に引いた 2 接線と円の接点を  $A, B$  とする。さらに、 $AB$  の延長上にある点  $Q$  から円  $O$  に引いた 2 接線と円の接点を  $C, D$  とする。このとき、3 点  $P, C, D$  は一直線上にあることを証明せよ。

(『高校への数学』高数オリンピック 2011年2月号)



**証明** 線分  $OP$  と  $AB$  の交点を  $E$ 、円  $O$  の半径を  $r$  とする。

$\angle OAP = \angle OEA$  より  $\triangle OAP \sim \triangle OEA$  であるから

$$OP : OA = OA : OE \quad \text{ゆえに} \quad OP \times OE = r^2$$

線分  $CD$  と  $OQ$  の交点を  $F$  とすると、同様にして

$$OQ \times OF = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad OQ \times OF = OP \times OE$$

直線  $CD$  と  $OP$  の交点を  $P'$  とすると、 $\angle OFP' = \angle OEQ$

より  $\triangle OFP' \sim \triangle OEQ$  であるから

$$OP' : OQ = OF : OE$$

$$\text{したがって} \quad OP' = \frac{OQ \times OF}{OE} = OP$$

$P$  と  $P'$  は一致する、すなわち、3 点  $P, C, D$  は一直線上にある。(証明終)

