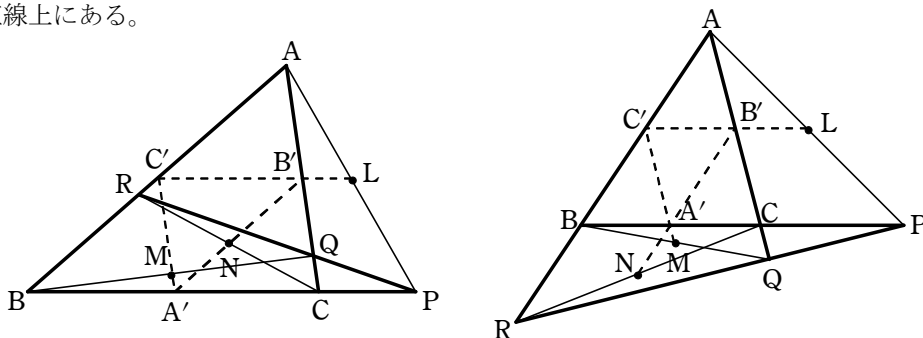


## ニュートン線

### 定 理

ある直線が  $\triangle ABC$  の辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  またはその延長とそれぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  で交わり、線分  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  の中点をそれぞれ  $L$ ,  $M$ ,  $N$  とする。このとき、3点  $L$ ,  $M$ ,  $N$  は 1 直線上にある。



どの 2 本も互いに交わり、どの 3 本も共通の交点をもたない、相異なる 4 本の直線によって決定される図形を**完全四辺形**という。4つの直線  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $PQ$  を完全四辺形の辺、 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  を頂点、線分  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  を対角線という。

このとき、上の定理は次のように表現される。

完全四辺形の 3 つの対角線の中点は 1 直線上にある。

対角線の中点  $L$ ,  $M$ ,  $N$  を含む直線を完全四辺形の**ニュートン線**という。

### 証 明

$\triangle ABC$  と直線  $PQR$  にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots\dots ①$$

辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  の中点をそれぞれ  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  とする。

3点  $L$ ,  $B'$ ,  $C'$  については、 $\triangle ABP$  と  $\triangle ACP$  に中点連結定理を用いると  $C'L \parallel BP$ ,  $LB' \parallel PC$  であるから、3点  $L$ ,  $B'$ ,  $C'$  は 1 直線上にあり

$$C'L = \frac{1}{2}BP, \quad LB' = \frac{1}{2}PC \quad \dots\dots ②$$

同様にして、3点  $M$ ,  $C'$ ,  $A'$  および 3点  $N$ ,  $A'$ ,  $B'$  はそれぞれ 1 直線上にあり

$$A'M = \frac{1}{2}CQ, \quad MC' = \frac{1}{2}QA, \quad B'N = \frac{1}{2}AR, \quad NA' = \frac{1}{2}RB \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③ により

$$\frac{2C'L}{2LB'} \cdot \frac{2A'M}{2MC'} \cdot \frac{2B'N}{2NA'} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{C'L}{LB'} \cdot \frac{B'N}{NA'} \cdot \frac{A'M}{MC'} = 1 \quad \dots\dots ④$$

$\triangle A'B'C'$  の辺または延長上の 3点  $L$ ,  $M$ ,  $N$  について、④によりメネラウスの定理の逆が成り立つから、3点  $L$ ,  $M$ ,  $N$  は 1 直線上にある。 (証明終)

この定理は次のようにも表現される。

四角形 ABCD の対辺 AB, CD の延長が交点 E をもち、対辺 AD, BC の延長が交点 F をもち、線分 AC, BD, EF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

このとき、3 点 L, M, N は 1 直線上にある。

### ベクトルによる証明

点 A を基準として、位置ベクトルを

$$B(\vec{b}), D(\vec{d}), E(s\vec{b}), F(t\vec{d})$$

とすると

$$M\left(\frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}\right), N\left(\frac{s\vec{b} + t\vec{d}}{2}\right)$$

ただし、 $s, t$  は  $s > 1, t > 1$  となる実数である。 $x$  を実数として

$$EC : CD = (1-x) : x$$

とおくと、 $\triangle AED$  と直線 BCF についてメネラウスの定理を用いて

$$\frac{1}{1-s} \cdot \frac{1-x}{x} \cdot \frac{t-1}{t} = 1 \quad \text{よって} \quad x = \frac{t-1}{st-1}$$

これから  $\overrightarrow{AC} = x \cdot s\vec{b} + (1-x) \cdot \vec{d} = \frac{s(t-1)}{st-1}\vec{b} + \frac{(s-1)t}{st-1}\vec{d}$  により

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{s(t-1)\vec{b} + (s-1)t\vec{d}}{2(st-1)}$$

ここで

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} - \frac{s(t-1)\vec{b} + (s-1)t\vec{d}}{2(st-1)} = \frac{(s-1)\vec{b} + (t-1)\vec{d}}{2(st-1)}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{s\vec{b} + t\vec{d}}{2} - \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \frac{(s-1)\vec{b} + (t-1)\vec{d}}{2}$$

したがって  $\overrightarrow{MN} = (st-1)\overrightarrow{LM}$  すなわち、3 点 L, M, N は 1 直線上にある。

(証明終)

