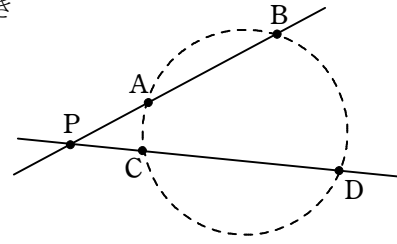


方べきの定理の逆

2つの線分 AB と CD または AB の延長と CD の延長が点 P で交わる時

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

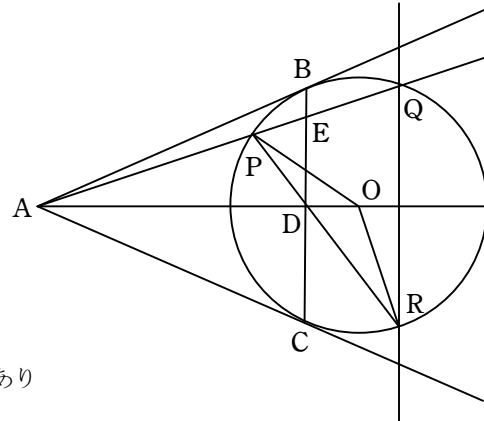
が成り立つならば、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある。



例題

点 A から円 O へひいた2本の接線の接点を B, C, 弦 BC と直線 AO の交点を D とする。また、直線 AO 上にない円 O の周上の点 P に対し、直線 PA, PD と円 O との P と異なる交点をそれぞれ Q, R とする。このとき、次を証明せよ。

- (1) 4点 A, P, O, R は1つの円周上にある。
- (2) 直線 QR は弦 BC に平行である。



証明

$\triangle ABD$ と $\triangle BOD$ は2組の角がそれぞれ等しいから相似であり

$$DA : DB = DB : DO$$

であるから $DA \cdot DO = DB^2 = DB \cdot DC$

また、方べきの定理により

$$DP \cdot DR = DB \cdot DC$$

したがって $DA \cdot DO = DP \cdot DR$

方べきの定理の逆により、4点 A, P, O, R は1つの円周上にある。

この円の円周角として

$$\angle PAO = \angle PRO$$

これを $\angle a$ とおく。直線 AP と弦 BC の交点を E とすると

$$\angle AED = 90^\circ - \angle a$$

また $\angle PQR = \frac{1}{2} \angle POR = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle a) = 90^\circ - \angle a$

同位角が等しいから直線 QR と弦 BC は平行である。

(点 P が弦 BC に関し点 A と反対側にある場合も同様に証明できるので考えてみて下さい。)

類題

- (1) $\triangle OAP \sim \triangle OPD$ (方べきの定理の逆を使わないで)
- (2) $\triangle PBD \sim \triangle PQC \sim \triangle BQD$, $DP \cdot DQ = DB^2$
- (3) 点 P が弦 BC に関し点 A と同じ側にある場合 $\angle APC + \angle BPD = 180^\circ$