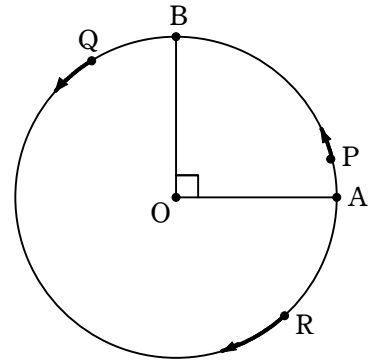


[3] 図のように、点 O を中心とする円と、その円周上に点 A, B があり、 OA と OB は垂直です。



3点 P, Q, R は、次のように円周上を動きます。

P は A を出発して、反時計回りに動き、6分で円を1周します。

Q は B を出発して、反時計回りに動き、6分で円を2周します。

R は A を出発して、時計回りに動き、6分で円を3周します。

P, Q, R は同時に動き始め、それぞれ一定の速さで円周上を動き、6分後に3点とも止まります。

P と Q, Q と R, R と P をまっすぐな線で結んで作った図形 PQR について、次の問いに答えなさい。

- (1) P, Q, R のうちの2点が重なり、図形 PQR が三角形にならないことが何度もあります。初めて三角形にならないのは、動き始めてから何秒後ですか。
また、2度目、3度目に三角形にならないのは、動き始めてから、それぞれ何秒後ですか。
- (2) 図形 PQR が三角形で、その辺上に中心 O があるのは、動き始めてから何秒後ですか。
考えられるものをすべて答えなさい。
- (3) 図形 PQR が正三角形になるのは、動き始めてから何秒後ですか。
考えられるものをすべて答えなさい。

解答

P は $6 \times 60 = 360$ 秒で 360° 動くから、角の速さは毎秒 1° である。 Q, R はそれぞれ毎秒 $2^\circ, 3^\circ$ となる。 P と Q の角度の差は毎秒 $2^\circ - 1^\circ = 1^\circ$ で変化する。 P と R では $1^\circ + 3^\circ = 4^\circ$ 、 Q と R では $2^\circ + 3^\circ = 5^\circ$ である。以下、 A から反時計回りに測った点の角度を「位置」といい、動き始めてからの時間を「時刻」という。

(1) P と Q の位置が初めて一致する時刻は $\frac{270^\circ}{1^\circ} = 270$ (秒)。

P と R では $\frac{360^\circ}{4^\circ} = 90$ (秒)。その後は90秒ごとに一致するから、時刻は180, 270秒。

Q と R では $\frac{270^\circ}{5^\circ} = 54$ (秒)。その後は $\frac{360^\circ}{5^\circ} = 72$ 秒ごとに一致するから、時刻は126, 198, 270秒。

答 1度目 54秒後, 2度目 90秒後, 3度目 126秒後

(2) 2点の位置の差が 180° となる時刻は、 P と Q では 90秒(×)。

P と R では45, 135, 225, 315秒。 Q と R では18, 90(×), 162, 234, 306秒。

これらのうち(1)の時刻以外が求めるものである。

答 18, 45, 135, 162, 225, 234, 306, 315秒後

(3) P と Q の位置の差が 120° または 240° になる時刻は30秒と150秒の2回のみである。

30秒のとき、 P, Q, R の位置はそれぞれ $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$

150秒のとき、 P, Q, R の位置はそれぞれ $150^\circ, 30^\circ, 270^\circ$ であり、いずれも正三角形になる。

答 30秒後, 150秒後