

**問題**  $x$  を正の実数とする。座標平面上の 3 点  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $P(x, x)$  をとり,  $\triangle APB$  を考える。 $x$  の値が変化するとき,  $\angle APB$  の最大値を求めよ。(京大 10 前・理系乙)

**解答** 半直線  $y=x (x>0)$  を  $\ell$ , 2 点  $A, B$  を通り  $\ell$  に接する円を  $C$ , その接点を  $T$  とする。方べきの定理を用いて

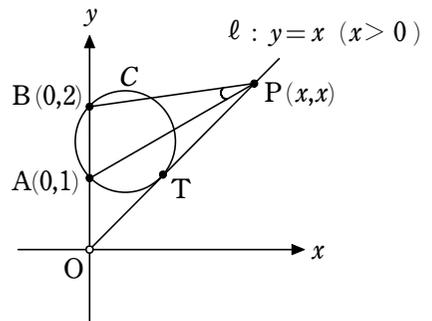
$$OT^2 = OA \cdot OB = 2 \quad \text{より} \quad OT = \sqrt{2}$$

ゆえに  $T(1, 1)$

$x$  の値が変化するとき点  $P$  は  $\ell$  上を動く。  $P$  が  $T$  と一致しないときには,  $P$  は直線  $AB$  ( $y$  軸) に関して  $T$  と同じ側で円  $C$  の外部にあるから

$$\angle APB < \angle ATB$$

したがって,  $\angle APB$  が最大となるのは,  $P$  が  $T$  と一致するとき, すなわち  $x=1$  のときで,  $\angle APB$  の最大値は  $\angle ATB=45^\circ$  である。



**参考** 2 点  $A, B$  を通り, 直線  $\ell$  に接する円の作図

①  $A, B$  を通る直線  $m$  をひき,  $\ell$  との交点を  $O$  とする。

②  $O$  を通り  $\ell$  に垂直な直線  $n$  をひく。

③  $n$  上に  $O$  をはさんで

$$OA' = OA, \quad OB' = OB$$

となる点  $A', B'$  をとる。

④  $A'B'$  を直径とする円をかき,  $\ell$  との交点を  $T_1, T_2$  とする。

$$\triangle OA'T_1 \sim \triangle OT_1B'$$

$$\text{より} \quad OT_1^2 = OA' \cdot OB' = OA \cdot OB$$

$$\text{同様に} \quad OT_2^2 = OA \cdot OB$$

方べきの定理の逆により  $T_1, T_2$  は求める円の接点となる。

⑤  $\triangle AT_1B$  および  $\triangle AT_2B$  の外接円をかく。

