

問題 x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり, $\triangle APB$ を考える。 x の値が変化するとき, $\angle APB$ の最大値を求めよ。(京大 10 前・理系乙)

解答 半直線 $y=x (x>0)$ を ℓ , 2 点 A, B を通り ℓ に接する円を C , その接点を T とする。方べきの定理を用いて

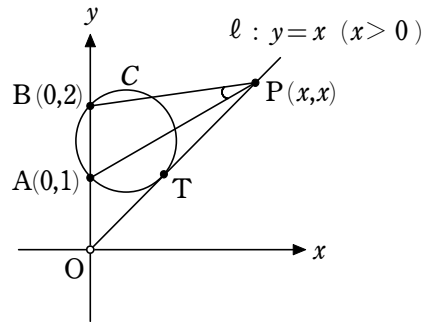
$$OT^2 = OA \cdot OB = 2 \quad \text{より} \quad OT = \sqrt{2}$$

ゆえに $T(1, 1)$

x の値が変化するとき点 P は ℓ 上を動く。 P が T と一致しないときには, P は直線 AB (y 軸) に関して T と同じ側で円 C の外部にあるから

$$\angle APB < \angle ATB$$

したがって, $\angle APB$ が最大となるのは, P が T と一致するとき, すなわち $x=1$ のときで, $\angle APB$ の最大値は $\angle ATB=45^\circ$ である。



参考 2 点 A, B を通り, 直線 ℓ に接する円の作図

① A, B を通る直線 m をひき, ℓ との交点を O とする。

② O を通り ℓ に垂直な直線 n をひく。

③ n 上に O をはさんで

$$OA' = OA, \quad OB' = OB$$

となる点 A', B' をとる。

④ $A'B'$ を直径とする円をかき, ℓ との交点を T_1, T_2 とする。

$$\triangle OA'T_1 \sim \triangle OT_1B'$$

$$\text{より} \quad OT_1^2 = OA' \cdot OB' = OA \cdot OB$$

$$\text{同様に} \quad OT_2^2 = OA \cdot OB$$

方べきの定理の逆により T_1, T_2 は求める円の接点となる。

⑤ $\triangle AT_1B$ および $\triangle AT_2B$ の外接円をかく。

