

問題  $xy$ -平面上の円  $C: x^2 + y^2 = 1$  の内側を半径  $\frac{1}{2}$  の円  $D$  が  $C$  に接しながらすべらずに転がる。

時刻  $t$  において  $D$  は点  $(\cos t, \sin t)$  で  $C$  に接しているとする。  $D$  の周上の点  $P$  の軌跡について考える。ある時刻  $t_0$  において点  $P$  が  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  にあり、  $D$  の中心が第 2 象限にあるとする。

以下の間に答えよ。

- (1) 時刻  $t_0$  における  $D$  の中心の座標を求めよ。
- (2) 第 1 象限において、点  $P$  が  $C$  上にあるときの  $P$  の座標を求めよ。
- (3) 点  $P$  の軌跡を  $xy$ -平面上に図示せよ。

解答  $D$  と  $C$  の接点を  $T$ ,  $D$  の中心を  $B$  とすると、  $B$  は原点を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円周上を動く。

- (1) 時刻  $t_0$  における  $T, B$  をそれぞれ  $T_0, B_0$  とする。また  $P_0(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  とすると、  $OP_0$  と  $x$  軸のなす角は  $\frac{\pi}{3}$  である。  $OP_0 = OB_0 = P_0B_0 = \frac{1}{2}$  より  $\triangle OP_0B_0$  は正三角形となり、  $B_0$  は第 2 象限にあるから  $OB_0$  と  $x$  軸のなす角は  $\frac{2}{3}\pi$  である。

したがって  $B_0(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

- (2) 求める点を  $P_1$  とすると、弧  $T_0P_0$  と弧  $T_0P_1$  の長さは等しいから

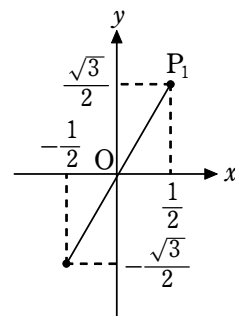
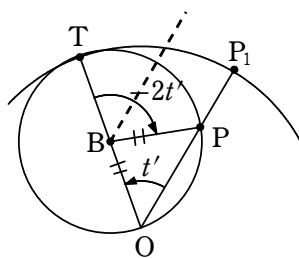
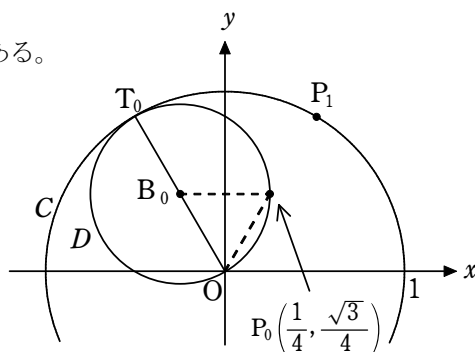
$$\frac{1}{2} \angle T_0B_0P_0 = \angle T_0OP_1 = \frac{\pi}{3}$$

したがって  $P_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

- (3)  $OP_1$  方向を基準に  $B$  が角  $t'$  だけ回転したとき、  $P$  は  $B$  のまわりで  $T$  を角  $-2t'$  だけ回転した方向にあるから、  $OP_1$  方向に対しては角  $-t'$  の方向にある。さらに  $BO = BP$  だから  $P$  は直線  $OP_1$  上にくることになる。

円  $C, D$  の周の長さはそれぞれ  $2\pi, \pi$  だから、  $P$  は  $O$  に関して  $P_1$  と対称な点で  $C$  上にくる。したがって、  $P$  の軌跡は 2 点  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  を結ぶ線分である。



別解  $D$  と  $C$  の接点を  $T(\cos t, \sin t)$  とすると、 $D$  の

中心  $B$  の座標は  $(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$  となる。また、

$D$  の周上にあつて、 $t=0$  のとき点  $A(1, 0)$  と一致する点を  $Q$ 、 $\overline{BQ}$  の  $x$  軸の正方向からの回転角を  $\theta$  とすると、弧  $TQ$  と弧  $TA$  の長さは等しいから

$$\frac{1}{2}(t-\theta)=t \quad \text{よつて} \quad \theta=-t$$

$\overline{BP}$  は  $\overline{BQ}$  を  $\alpha (0 \leq \alpha < 2\pi)$  だけ回転したものとすると

$\overline{BP}$  の  $x$  軸の正方向からの回転角は  $\alpha-t$  であるから

$$\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP}$$

$$= \left( \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t \right) + \left( \frac{1}{2}\cos(\alpha-t), \frac{1}{2}\sin(\alpha-t) \right)$$

$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ ,  $\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  を用いると

$$\overline{OP} = \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( t - \frac{\alpha}{2} \right), \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( t - \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$(1) \quad \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( t_0 - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{4}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( t_0 - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

から  $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$ ,  $0 \leq \frac{\alpha}{2} < \pi$  であるから  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$  ゆえに  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$

$\frac{\pi}{2} < t_0 < \pi$  であり  $\cos \left( t_0 - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$  から  $t_0 = \frac{2}{3}\pi$  このとき

$$B \left( \frac{1}{2}\cos \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sin \frac{2}{3}\pi \right) \quad \text{から} \quad B \left( -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$(2) \quad \overline{OP} = \left( \frac{1}{2}\cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right), \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$P$  が第 1 象限において  $C$  上にあるとき、 $\cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right) > 0$  かつ  $|\overline{OP}| = 1$  であるから

$$|\overline{OP}|^2 = \cos^2 \left( t - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \text{から} \quad \cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad P \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(3) \quad P(x, y) \text{ とおくと } x = \frac{1}{2}\cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right), \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right)$$

$t$  を消去すると  $y = \sqrt{3}x$

また  $-1 \leq \cos \left( t - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$  から  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

したがつて  $P$  の軌跡は 2 点  $\left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ,  $\left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  を結ぶ線分である。

