

問題 xy -平面上の円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の内側を半径 $\frac{1}{2}$ の円 D が C に接しながらすべらずに転がる。

時刻 t において D は点 $(\cos t, \sin t)$ で C に接しているとする。 D の周上の点 P の軌跡について考える。ある時刻 t_0 において点 P が $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ にあり、 D の中心が第 2 象限にあるとする。

以下の間に答えよ。

- (1) 時刻 t_0 における D の中心の座標を求めよ。
- (2) 第 1 象限において、点 P が C 上にあるときの P の座標を求めよ。
- (3) 点 P の軌跡を xy -平面上に図示せよ。

解答 D と C の接点を T , D の中心を B とすると、 B は原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上を動く。

- (1) 時刻 t_0 における T, B をそれぞれ T_0, B_0 とする。また $P_0(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ とすると、 OP_0 と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である。 $OP_0 = OB_0 = P_0B_0 = \frac{1}{2}$ より $\triangle OP_0B_0$ は正三角形となり、 B_0 は第 2 象限にあるから OB_0 と x 軸のなす角は $\frac{2}{3}\pi$ である。

したがって $B_0(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

- (2) 求める点を P_1 とすると、弧 T_0P_0 と弧 T_0P_1 の長さは等しいから

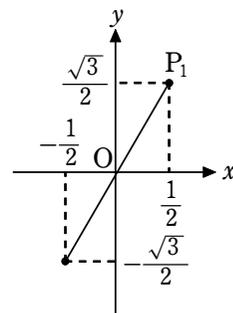
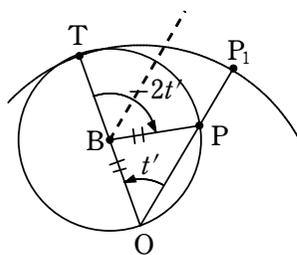
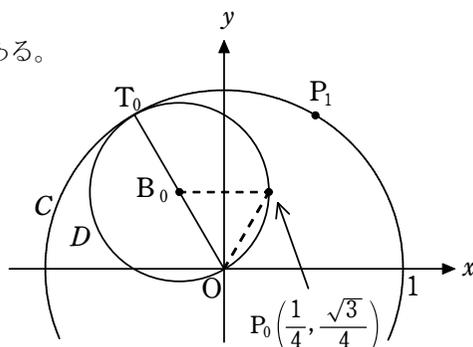
$$\frac{1}{2} \angle T_0B_0P_0 = \angle T_0OP_1 = \frac{\pi}{3}$$

したがって $P_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

- (3) OP_1 方向を基準に B が角 t' だけ回転したとき、 P は B のまわりで T を角 $-2t'$ だけ回転した方向にあるから、 OP_1 方向に対しては角 $-t'$ の方向にある。さらに $BO = BP$ だから P は直線 OP_1 上にくることになる。

円 C, D の周の長さはそれぞれ $2\pi, \pi$ だから、 P は O に関して P_1 と対称な点で C 上にくる。したがって、 P の軌跡は 2 点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ を結ぶ線分である。



別解 D と C の接点を $T(\cos t, \sin t)$ とすると、 D の

中心 B の座標は $(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$ となる。また、

D の周上にあつて、 $t=0$ のとき点 $A(1, 0)$ と一致する点を Q 、 \overline{BQ} の x 軸の正方向からの回転角を θ とすると、弧 TQ と弧 TA の長さは等しいから

$$\frac{1}{2}(t-\theta)=t \quad \text{よつて} \quad \theta=-t$$

\overline{BP} は \overline{BQ} を α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) だけ回転したものとすると

\overline{BP} の x 軸の正方向からの回転角は $\alpha-t$ であるから

$$\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t \right) + \left(\frac{1}{2}\cos(\alpha-t), \frac{1}{2}\sin(\alpha-t) \right)$$

$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$, $\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ を用いると

$$\overline{OP} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(t - \frac{\alpha}{2} \right), \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(t - \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$(1) \quad \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(t_0 - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{4}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(t_0 - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

から $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$, $0 \leq \frac{\alpha}{2} < \pi$ であるから $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$ ゆえに $\alpha = \frac{2}{3}\pi$

$\frac{\pi}{2} < t_0 < \pi$ であり $\cos \left(t_0 - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ から $t_0 = \frac{2}{3}\pi$ このとき

$$B \left(\frac{1}{2}\cos \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sin \frac{2}{3}\pi \right) \quad \text{から} \quad B \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$(2) \quad \overline{OP} = \left(\frac{1}{2}\cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right), \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

P が第 1 象限において C 上にあるとき、 $\cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right) > 0$ かつ $|\overline{OP}| = 1$ であるから

$$|\overline{OP}|^2 = \cos^2 \left(t - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \text{から} \quad \cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad P \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(3) \quad P(x, y) \text{ とおくと } x = \frac{1}{2}\cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right), \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right)$$

t を消去すると $y = \sqrt{3}x$

また $-1 \leq \cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$ から $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

したがつて P の軌跡は 2 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ を結ぶ線分である。

