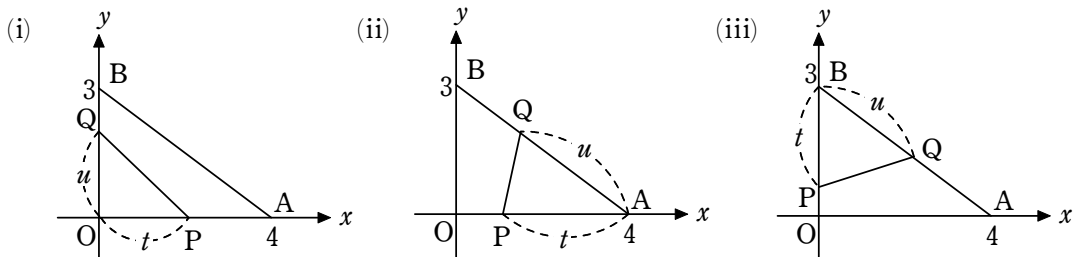


解答 線分を PQ とし、次の (i)~(iii) の場合に分けて考える。



(i) P, Q が辺 OA, OB 上にある場合

OP=t, OQ=u とすると,  $0 < t \leq 4$ ,  $0 < u \leq 3$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \triangle OAB \quad \text{から} \quad \frac{1}{2}tu = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \quad \text{よって} \quad tu = 6$$

$$PQ^2 = t^2 + u^2 = t^2 + \frac{36}{t^2} \quad \text{ただし} \quad 2 \leq t \leq 4$$

$$f(t) = t^2 + \frac{36}{t^2} \quad \text{とおくと} \quad f'(t) = 2t - 2 \cdot \frac{36}{t^3} = \frac{2(t^2 - 6)(t^2 + 6)}{t^3}$$

$PQ^2$  は,  $t=4$ ,  $u=\frac{3}{2}$  のとき最大値  $\frac{73}{4}$ ,

$t=u=\sqrt{6}$  のとき最小値 12 をとる。

(ii) P, Q が辺 AO, AB 上にある場合

AP=t, AQ=u とすると,  $0 < t \leq 4$ ,  $0 < u \leq 5$  また  $\cos \angle A = \frac{4}{5}$

$$\frac{1}{2}tu \sin \angle A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin \angle A \quad \text{よって} \quad tu = 10$$

$$PQ^2 = t^2 + u^2 - 2tu \cos \angle A = t^2 + \frac{100}{t^2} - 16 \quad \text{ただし} \quad 2 \leq t \leq 4$$

以下 (i) と同様にして,  $PQ^2$  は

$t=2$ ,  $u=3$  のとき最大値 13,  $t=u=\sqrt{10}$  のとき最小値 4 をとる。

(iii) P, Q が辺 BO, BA 上にある場合

BP=t, BQ=u とすると,  $0 < t \leq 3$ ,  $0 < u \leq 5$  また  $\cos \angle B = \frac{3}{5}$

$$tu = \frac{15}{2}, \quad PQ^2 = t^2 + \frac{225}{4t^2} - 9 \quad \text{ただし} \quad \frac{3}{2} \leq t \leq 3$$

$PQ^2$  は,  $t=\frac{3}{2}$ ,  $u=5$  のとき最大値  $\frac{73}{4}$ ,  $t=u=\sqrt{\frac{15}{2}}$  のとき最小値 6 をとる。

(i)~(iii) をまとめると, PQ が最大となるのは PQ が A を通る中線のときで最大値は  $\frac{\sqrt{73}}{2}$ ,

最小となるのは AP=AQ のときで最小値は 2 である。

t	2	...	$\sqrt{6}$	...	4
f'(t)		-	0	+	
f(t)	13	↘	12	↗	$\frac{73}{4}$