

問題 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

平面内に同一直線上にない3点 A, B, C をとり, $AB=3$, $BC=1$, $AC=t$ とする。
 また直線 AC に関して B の反対側に点 D をとり, $CD=2$ とする。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径は (あ) であり, $t=(い)$ のとき (あ) は最小となる。

また, 四角形 ABCD が円に内接するとき, $AD=(う)$ である。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径は (え) である。

(3) 四角形 ABCD の各辺がひとつの共通の円に接しているとき $AD=(お)$ であり,

その円の半径は (か) である。 $t=(き)$ のとき (か) は最大となる。

(慶應大 2011 医・Ⅲ)

解答

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R , $\angle B=B$ とすると

$$\cos B = \frac{3^2 + 1^2 - t^2}{2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{-t^2 + 10}{6}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{-t^2 + 10}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6^2 - (-t^2 + 10)^2}}{6} = \frac{\sqrt{-t^4 + 20t^2 - 64}}{6}$$

したがって $R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{3t}{\sqrt{-t^4 + 20t^2 - 64}} \dots\dots (あ)$

$$R = \frac{3}{\sqrt{20 - \left(t^2 + \frac{64}{t^2}\right)}}, \quad t^2 + \frac{64}{t^2} \geq 2\sqrt{t^2 \cdot \frac{64}{t^2}} = 16$$

R が最小となるのは $t^2 + \frac{64}{t^2}$ が最小となるときで, このとき

$$t^2 = \frac{64}{t^2} \quad \text{ゆえに} \quad t = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots (い)$$

$AD=x$ とおくと, 四角形 ABCD が円に内接するとき

$\cos \angle ADC = \cos(\pi - B) = -\cos B$ であるから

$$t^2 = x^2 + 2^2 + 2 \cdot 2x \cos B \quad \text{から}$$

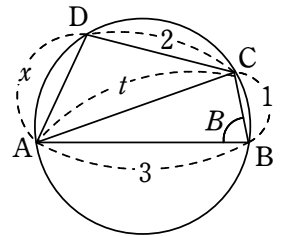
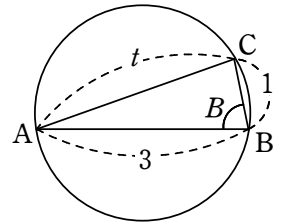
$$x^2 + (4 \cos B)x - t^2 + 4 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad x = -2 \cos B \pm \sqrt{4 \cos^2 B + t^2 - 4}$$

ここで $t > 2$ から $\sqrt{4 \cos^2 B + t^2 - 4} > |2 \cos B|$, $x > 0$ となるのは

$$x = -2 \cos B + \sqrt{4 \cos^2 B + t^2 - 4}$$

$$= \frac{t^2 - 10}{3} + \sqrt{\frac{(-t^2 + 10)^2}{9} + t^2 - 4} = \frac{t^2 - 10 + \sqrt{t^4 - 11t^2 + 64}}{3} \quad \dots\dots (う)$$



(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r 、面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \sin B = \frac{1}{2}(3+1+t)r$$

$$\text{ゆえに } r = \frac{3 \sin B}{t+4} = \frac{\sqrt{-t^4+20t^2-64}}{2(t+4)} \quad \dots\dots (\text{え})$$

(3) 四角形 $ABCD$ が円に外接しているとき、

$$AD+BC=AB+CD$$

$$\text{ゆえに } AD=3+2-1=4 \quad \dots\dots (\text{お})$$

円の半径を r' 、四角形 $ABCD$ の面積を S' 、

$\angle D = D$ とすると

$$\cos D = \frac{2^2+4^2-t^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{-t^2+20}{16}$$

$$\sin D = \sqrt{1-\cos^2 D} = \sqrt{\frac{16^2 - (-t^2+20)^2}{16^2}} = \frac{\sqrt{-t^4+40t^2-144}}{16}$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \sin B + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin D = \frac{1}{2}(3+2+1+4)r'$$

$$\text{ゆえに } r' = \frac{3}{10} \sin B + \frac{4}{5} \sin D = \frac{1}{20}(\sqrt{-t^4+20t^2-64} + \sqrt{-t^4+40t^2-144}) \quad \dots\dots (\text{か})$$

$$= \frac{1}{20} \{ \sqrt{6^2 - (-t^2+10)^2} + \sqrt{16^2 - (-t^2+20)^2} \}$$

3 辺の長さが 3, 1, t の $\triangle ABC$ が存在するためには

$$2 < t < 4 \quad \text{これから } 4 < t^2 < 16$$

いま x 軸上に点 $E(10, 0)$, $F(20, 0)$, $P(t^2, 0)$

をとり、 E を中心とする半径 6 の円を C_1 、

F を中心とする半径 16 の円を C_2 、 P を通り

x 軸に垂直な直線を ℓ とする。 ℓ と C_1 の第 1

象限にある交点を Q 、 ℓ と C_2 の第 4 象限に

ある交点を R とすると

$$\begin{aligned} & \sqrt{6^2 - (-t^2+10)^2} + \sqrt{16^2 - (-t^2+20)^2} \\ &= PQ + PR = QR \end{aligned}$$

t^2 が $4 < t^2 < 16$ の範囲で増加するとき、 QR の

長さが最大となるのは、 PQ の減少と PR の増加

が釣りあうとき、すなわち $EQ \parallel FR$ のときである。このときの t の値は

$$(t^2-10) : (20-t^2) = 6 : 16 \quad \text{から } t^2 = \frac{140}{11} \quad \text{ゆえに } t = \sqrt{\frac{140}{11}} \quad \dots\dots (\text{き})$$

(導関数から増減を調べて最大となる t の値を見出すのはとても困難だと思えたので

図形的な解法を考えました。)

