

**問題** 座標平面において、点  $P(0, 1)$  を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。 $a$  を  $0 < a < 1$  を満たす実数とし、直線  $y = a(x+1)$  と  $C$  との交点を  $Q, R$  とする。

- (1)  $\triangle PQR$  の面積  $S(a)$  を求めよ。  
 (2)  $a$  が  $0 < a < 1$  の範囲を動くとき、 $S(a)$  が最大となる  $a$  を求めよ。

(東京大 2011 前期・理科・第 1 問)

**解答** (1) 直線  $y = a(x+1)$  を  $\ell$  とし、 $\ell$  と  $P$  の距離を  $d$  とすると、

$0 < a < 1$  であることを考慮して

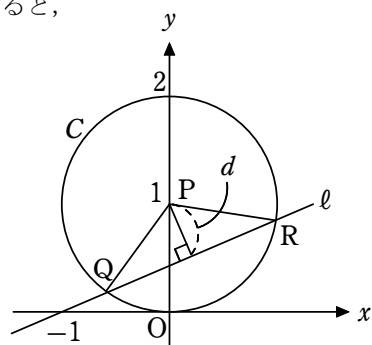
$$d = \frac{|a \cdot 0 - 1 + a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

ゆえに

$$S(a) = \frac{1}{2} QR \cdot d = d\sqrt{1-d^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで  $1-d^2 = 1 - \frac{(1-a)^2}{a^2+1} = \frac{2a}{a^2+1}$  であるから

$$S(a) = \frac{(1-a)\sqrt{2a}}{a^2+1} \quad \dots\dots \text{(答)}$$



- (2)  $a$  が  $0 < a < 1$  の範囲で増加するとき、題意から  $d$  は  $1 > d > 0$  の範囲で単調に減少する。

① から

$$S(a) = \sqrt{d^2 - d^4} = \sqrt{-\left(d^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (0 < d^2 < 1)$$

ゆえに  $S(a)$  は  $d^2 = \frac{1}{2}$  のとき、最大値  $\frac{1}{2}$  をとる。このとき

$$\frac{(1-a)^2}{a^2+1} = \frac{1}{2} \quad \text{から} \quad a^2 - 4a + 1 = 0$$

$0 < a < 1$  であるから  $a = 2 - \sqrt{3}$   $\dots\dots \text{(答)}$

**補足**  $\angle QPR = \theta$  とおくと

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \sin \theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

であるから、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき最大値  $\frac{1}{2}$  をとる。