

問題 O を原点とする座標平面において、 x 軸上の点 $P(t+2, 0)$ と y 軸上の点 $Q(0, -2t^2-2t+4)$ を考える。ただし、 $t \geq 0$ とする。

[1] 点 Q の y 座標が 0 以上であるとき、 $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$ である。 t が $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$ の範囲で変化するときに、点 P の x 座標の範囲は $2 \leq x \leq \boxed{\text{ム}}$ となる。

また、直線 PQ の方程式は

$$y = g_t(x) = \boxed{\text{メ}} x + \boxed{\text{モ}}$$

となる。

[2] t が $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$ の範囲で変化するとき、線分 PQ が通過する領域を D (すなわち、線分 PQ は領域 D の内部を移動する) とし、領域 D の面積を求めたい。ここで、 x 軸、 y 軸以外の領域 D の境界を C とする。

曲線 C の方程式を $y = f(x)$ とすると、 $f(x)$ の定義域は $\boxed{\text{ヤ}} \leq x \leq \boxed{\text{ユ}}$ となる。

ある x に対して、 $f(x)$ は t が $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$ の範囲で変化するときの $g_t(x)$ の最大値として求められる。したがって、

$$\boxed{\text{ヤ}} \leq x \leq \boxed{\text{ヨ}} \text{ のとき, } f(x) = \boxed{\text{ラ}}$$

$$\boxed{\text{ヨ}} \leq x \leq \boxed{\text{ユ}} \text{ のとき, } f(x) = \boxed{\text{リ}}$$

となる。

以上より、領域 D の面積は $\boxed{\text{ル}}$ となる。

(2011 立命館大 A方式・薬・IV)

解答

[1] 点 Q の y 座標が 0 以上であるとき

$$-2t^2 - 2t + 4 \geq 0 \quad \text{から} \quad t^2 + t - 2 \leq 0$$

$$(t+2)(t-1) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leq t \leq 1$$

これと $t \geq 0$ から、求める t の値の範囲は $0 \leq t \leq$

点 P の x 座標の範囲は $x = t + 2$ から $2 \leq x \leq$

また、直線 PQ の傾きは $\frac{-(-2t^2 - 2t + 4)}{t + 2} = 2(t - 1)$ であるから、その方程式は

$$y = g_t(x) = \boxed{2(t-1)}x + \boxed{(-2t^2 - 2t + 4)}$$

[2] t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲で変化するとき、P の x 座標の範囲は $2 \leq x \leq 3$ 、Q の x 座標が 0 で

あるから、 $f(x)$ の定義域は $\leq x \leq$ となる。ここで

$$g_t(x) = -2t^2 + 2(x-1)t - 2x + 4$$

$$= -2\left(t - \frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x-3)^2$$

$0 \leq x \leq 3$ のとき $-\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$ であるから

(i) $-\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq 0$ すなわち $\leq x \leq$ のとき

$g_t(x)$ は $t=0$ で最大値をとるから

$$f(x) = \boxed{-2x + 4}$$

(ii) $0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$ すなわち $\leq x \leq$ のとき

$g_t(x)$ は $t = \frac{x-1}{2}$ で最大値をとるから

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{2}(x-3)^2}$$

以上より、領域 D の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (-2x + 4) dx + \int_1^3 \frac{1}{2}(x-3)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}(4+2) \cdot 1 + \left[\frac{1}{6}(x-3)^3 \right]_1^3 \\ &= 3 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

