

問題 O を原点とする座標平面において、 $x$  軸上の点  $P(t+2, 0)$  と  $y$  軸上の点  $Q(0, -2t^2-2t+4)$  を考える。ただし、 $t \geq 0$  とする。

[1] 点  $Q$  の  $y$  座標が  $0$  以上であるとき、 $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$  である。 $t$  が  $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$  の範囲で変化するときに、点  $P$  の  $x$  座標の範囲は  $2 \leq x \leq \boxed{\text{ム}}$  となる。

また、直線  $PQ$  の方程式は

$$y = g_t(x) = \boxed{\text{メ}} x + \boxed{\text{モ}}$$

となる。

[2]  $t$  が  $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$  の範囲で変化するときに、線分  $PQ$  が通過する領域を  $D$  (すなわち、線分  $PQ$  は領域  $D$  の内部を移動する) とし、領域  $D$  の面積を求めたい。ここで、 $x$  軸、 $y$  軸以外の領域  $D$  の境界を  $C$  とする。

曲線  $C$  の方程式を  $y = f(x)$  とすると、 $f(x)$  の定義域は  $\boxed{\text{ヤ}} \leq x \leq \boxed{\text{ユ}}$  となる。

ある  $x$  に対して、 $f(x)$  は  $t$  が  $0 \leq t \leq \boxed{\text{ミ}}$  の範囲で変化するときの  $g_t(x)$  の最大値として求められる。したがって、

$$\boxed{\text{ヤ}} \leq x \leq \boxed{\text{ヨ}} \text{ のとき、 } f(x) = \boxed{\text{ラ}}$$

$$\boxed{\text{ヨ}} \leq x \leq \boxed{\text{ユ}} \text{ のとき、 } f(x) = \boxed{\text{リ}}$$

となる。

以上より、領域  $D$  の面積は  $\boxed{\text{ル}}$  となる。

(2011 立命館大 A方式・薬・IV)

解答

[1] 点 Q の y 座標が 0 以上であるとき

$$-2t^2 - 2t + 4 \geq 0 \quad \text{から} \quad t^2 + t - 2 \leq 0$$

$$(t+2)(t-1) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leq t \leq 1$$

これと  $t \geq 0$  から、求める  $t$  の値の範囲は  $0 \leq t \leq$

点 P の x 座標の範囲は  $x = t + 2$  から  $2 \leq x \leq$

また、直線 PQ の傾きは  $\frac{-(-2t^2 - 2t + 4)}{t + 2} = 2(t - 1)$  であるから、その方程式は

$$y = g_t(x) = \boxed{2(t-1)}x + \boxed{(-2t^2 - 2t + 4)}$$

[2]  $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で変化するとき、P の x 座標の範囲は  $2 \leq x \leq 3$ 、Q の x 座標が 0

であるから、 $f(x)$  の定義域は   $\leq x \leq$   となる。ここで

$$g_t(x) = -2t^2 + 2(x-1)t - 2x + 4$$

$$= -2\left(t - \frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x-3)^2$$

$0 \leq x \leq 3$  のとき  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$  であるから

(i)  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq 0$  すなわち   $\leq x \leq$   のとき

$g_t(x)$  は  $t=0$  で最大値をとるから

$$f(x) = \boxed{-2x + 4}$$

(ii)  $0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$  すなわち   $\leq x \leq$   のとき

$g_t(x)$  は  $t = \frac{x-1}{2}$  で最大値をとるから

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{2}(x-3)^2}$$

以上より、領域 D の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (-2x + 4) dx + \int_1^3 \frac{1}{2}(x-3)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}(4+2) \cdot 1 + \left[ \frac{1}{6}(x-3)^3 \right]_1^3 \\ &= 3 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

