

問題 a を実数とする。円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち、点 $(0, 1)$ を通るものとする。 C の中心を $P(X, Y)$ とし、以下の問いに答えよ。

- (1) X, Y を a を用いて表せ。
- (2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

(東北大 11 前・理系・2)

解答 $A(a, -a)$, $B(0, 1)$, 直線 $y = -x$ を ℓ とする。

- (1) A を通り、 ℓ に垂直な直線の方程式は

$$y - (-a) = x - a \quad \text{から} \quad y = x - 2a$$

P はこの直線上にあるから $Y = X - 2a$ …… ①

また、 $PA = PB$ であるから $PA^2 = PB^2$ すなわち

$$(X - a)^2 + (Y + a)^2 = X^2 + (Y - 1)^2 \quad \text{から}$$

$$-2aX + 2aY + 2a^2 = -2Y + 1$$

$$aX - (a + 1)Y = a^2 - \frac{1}{2} \quad \text{…… ②}$$

①, ② を連立して解くと

$$X = a^2 + 2a + \frac{1}{2}, \quad Y = a^2 + \frac{1}{2} \quad \text{…… (答)}$$

- (2) a が動くとき点 P の軌跡は、 B を焦点 ℓ を準線とする放物線である。

$$y = a^2 + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{のとき} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{から}$$

P の軌跡と直線 $y=1$ の交点の x 座標は

$$x = a^2 + 2a + \frac{1}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

図より $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ の範囲で P の軌跡は直線 $y=1$ より下方にあるから、求める面積を S とすると

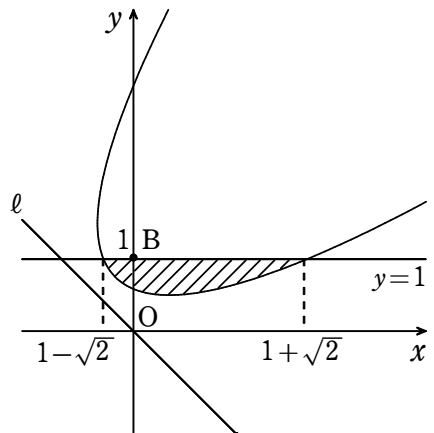
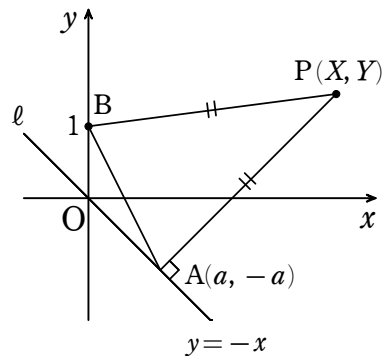
$$S = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (1 - y) dx$$

$$x = a^2 + 2a + \frac{1}{2} \quad \text{とおくと} \quad y = a^2 + \frac{1}{2} \quad \text{であり} \quad dx = 2(a + 1)da$$

したがって

$$S = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-a^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2(a + 1)da = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^3 - 2a^2 + a + 1)da$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^2 + 1)da = 2 \left[-\frac{2}{3}a^3 + a \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{…… (答)}$$



a	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
x	$1 - \sqrt{2} \rightarrow 1 + \sqrt{2}$