

**問題** 定数  $k$  は  $k > 1$  をみたすとする。  $xy$  平面上の点  $A(1, 0)$  を通り  $x$  軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を、3 点  $X, Y$  が  $AY = kAX$  をみたしながら動いている。 原点  $O(0, 0)$  を中心とする半径 1 の円と線分  $OX, OY$  が交わる点をそれぞれ  $P, Q$  とするとき、 $\triangle OPQ$  の面積の最大値を  $k$  を用いて表せ。 (東工大 2011 前・3)

**解答** 動径  $OX, OY$  の表す角をそれぞれ  $\alpha, \beta$ , また  $\theta = \beta - \alpha$

とすると、 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  であり

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin \theta$$

また、 $AY = kAX$  より  $\tan \beta = k \tan \alpha$  となり、

$\tan \alpha = t$  とおくと、 $t > 0$  であり

$$\tan \theta = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{(k-1)t}{1 + kt^2} = \frac{k-1}{kt + \frac{1}{t}}$$

ここで

$\triangle OPQ$  の面積が最大になる  $\Leftrightarrow \sin \theta$  が最大値をとる

$\Leftrightarrow \tan \theta$  が最大値をとる

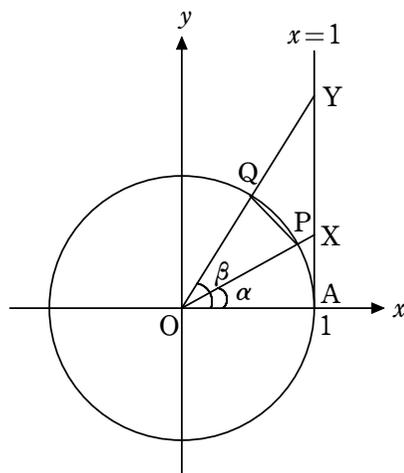
$\Leftrightarrow kt + \frac{1}{t}$  が最小値をとる

であるから、 $kt = \frac{1}{t}$  すなわち  $t = \frac{1}{\sqrt{k}}$  のとき、 $\tan \theta$  は最小値  $\frac{k-1}{2\sqrt{k}}$  をとる。

このとき  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{(k-1)^2}{4k} = \frac{(k+1)^2}{4k}$ ,  $k > 1$  より  $\cos \theta = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}$

したがって、 $\triangle OPQ$  の面積の最大値は

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \cos \theta \tan \theta = \frac{k-1}{2(k+1)} \quad \dots\dots (\text{答})$$



**補足** 解答に用いるには論理が難しいと思いますが、 $\angle XOY$  が最大するとき次の性質が成り立ちます。

「3 点  $O, X, Y$  の外接円  $K$  は  $O$  で  $x$  軸に接する」

このとき  $K$  の中心を  $C(0, \frac{(k+1)t}{2})$ , 半径を  $R$  とすると

$CO = CX$  すなわち  $\frac{(k+1)^2 t^2}{4} = 1^2 + \frac{(k-1)^2 t^2}{4}$  から  $kt^2 = 1$

$R = OC = \frac{(k+1)t}{2} = \frac{k+1}{2\sqrt{k}}$ ,  $XY = (k-1)t = \frac{k-1}{\sqrt{k}}$  から

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{XY}{2R} = \frac{k-1}{2(k+1)}$$

