

問題 O を原点とする  $xy$  平面において、直線  $y=1$  の  $|x| \geq 1$  を満たす部分を  $C$  とする。

- (1)  $C$  上に点  $A(t, 1)$  をとるとき、線分  $OA$  の垂直二等分線の方程式を求めよ。  
 (2) 点  $A$  が  $C$  全体を動くとき、線分  $OA$  の垂直二等分線が通過する範囲を求め、それを図示せよ。

(筑波大 11 前・1)

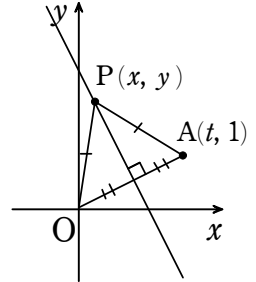
解答

- (1) 線分  $OA$  の垂直二等分線上の任意の点を  $P(x, y)$  とすると

$PO=PA$  すなわち  $PO^2=PA^2$  から

$$x^2+y^2=(x-t)^2+(y-1)^2,$$

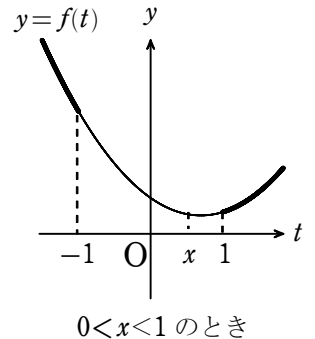
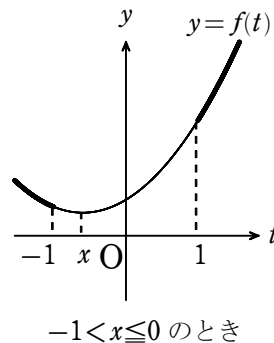
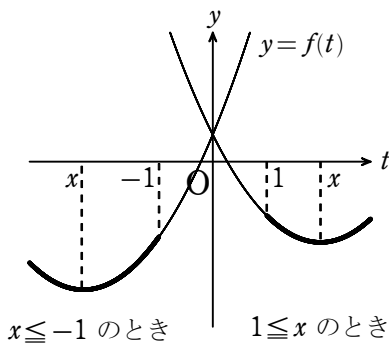
$$0=-2tx+t^2-2y+1 \quad \text{ゆえに} \quad y=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$$



- (2) (1) より

$$y=\frac{1}{2}t^2-tx+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-x)^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

上の式の右辺を  $f(t)$  とおき、ある  $x$  の値について、 $t$  が  $|t| \geq 1$  の範囲で変化するとき、 $f(t)$  のとり得る値の範囲を求める。



$|x| \geq 1$  のとき、 $f(t)$  は  $t=x$  で最小値  $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$  をとる。

$-1 < x \leq 0$  のとき、 $f(t)$  は  $t=-1$  で最小値  $x+1$  をとる。

$0 < x < 1$  のとき、 $f(t)$  は  $t=1$  で最小値  $-x+1$  をとる。

したがって、求める範囲は

$$|x| \geq 1 \text{ のとき} \quad y \geq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

$$-1 < x \leq 0 \text{ のとき} \quad y \geq x+1$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad y \geq -x+1$$

であり、右図の斜線部分ただし境界を含む。

