

問題 座標平面において、原点を O とし、次のような 3 点 P, Q, R を考える。

(a) 点 P は x 軸上にあり、その x 座標は正である。

(b) 点 Q は第 1 象限にあつて、 $OQ=QP=1$ を満たす。

(c) 点 R は第 1 象限にあつて、 $OR+RP=2$ を満たし、かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

ただし、座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 上の条件を満たす 2 点 Q, R が存在するような、点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の範囲を点 P が動くとき、線分 QR が通過する領域を図示し、その面積を求めよ。

(3) 線分 OP の中点を M とする。(1) の範囲を点 P が動くとき、四角形 $MPRQ$ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。

(東京医科歯科大 2011 前・2)

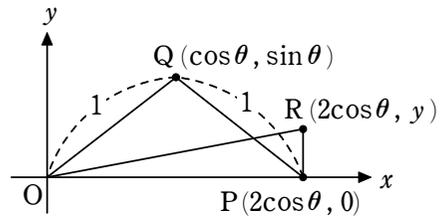
解答 点 Q は第 1 象限にあって、 $OQ=1$ を満たすから、

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる θ を用いて $Q(\cos \theta, \sin \theta)$ と表

される。点 P は x 軸上の正の範囲にあり、 $QP=1$ であるから $P(2\cos \theta, 0)$ 、また、 $R(2\cos \theta, y)$ とおくと

$$OR^2 = OP^2 + RP^2 \quad \text{から} \quad (2-y)^2 = (2\cos \theta)^2 + y^2$$

$$\text{ゆえに} \quad y = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$



(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、点 P の x 座標は $x = 2\cos \theta$ であるから $0 < x < 2$ …… (答)

(2) $R(x, y)$ とおくと $x = 2\cos \theta$ 、 $y = \sin^2 \theta$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき R の軌跡は

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y = 1 \quad \text{から} \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \quad (0 < x < 2)$$

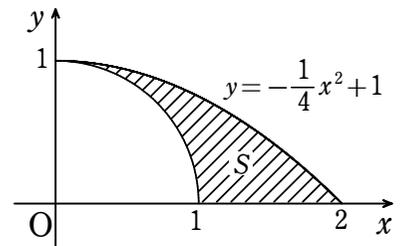
θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するとき、Q は単位円周上を

点 (1, 0) から点 (0, 1) まで動き、R は曲線

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ 上を点 (2, 0) から点 (0, 1) まで動く。

したがって、線分 QR が通過する領域は右図の斜線部分である。ただし x 軸上の境界および点 (0, 1) は含まない。

この領域の面積 S は



$$S = \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx - \frac{1}{4}\pi = \left[-\frac{1}{12}x^3 + x\right]_0^2 - \frac{1}{4}\pi = \frac{4}{3} - \frac{1}{4}\pi \quad \text{…… (答)}$$

(3) 四角形 MPRQ は台形だから、その面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(\sin \theta + \sin^2 \theta)\cos \theta$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \sin \theta)\sin 2\theta$$

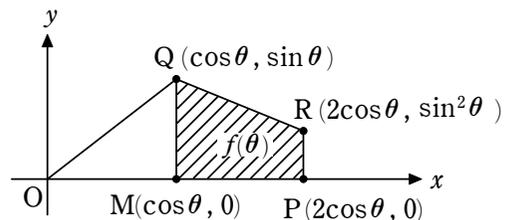
$$f'(\theta) = \frac{1}{4}\cos \theta \sin 2\theta + \frac{1}{4}(1 + \sin \theta) \cdot 2\cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \sin^2 \theta)\sin \theta + \frac{1}{2}(1 + \sin \theta)(1 - 2\sin^2 \theta)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 + \sin \theta)(3\sin^2 \theta - \sin \theta + 1)$$

$\sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) となる α をとると

$f(\theta)$ の増減は右のようになる。求める P の x 座標は



θ	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

$$2 \cos \alpha = 2 \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{3} \quad \text{…… (答)}$$