

問題 座標平面上の1点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の2点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を、3点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、 $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。
(東大 2011 前・文科, 理科・4)

解答 $G(X, Y)$ は $\triangle PQR$ の重心であるから $X = \frac{1}{3}\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)$, $Y = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4}\right)$

$$\text{ゆえに } \alpha + \beta = 3X - \frac{1}{2}, \alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \quad \dots\dots ①$$

題意から $PQ = PR$ すなわち $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2$ から

$$\left(\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha\right) - \left(\beta^4 + \frac{1}{2}\beta^2 - \beta\right) = 0$$

$$(\alpha - \beta) \left\{ (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 \right\} = 0$$

$\alpha \neq \beta$ であるから $(\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}\right) = 1$

$$① \text{ より } \left(3X - \frac{1}{2}\right)\left(3Y + \frac{1}{4}\right) = 1 \quad \dots ②' \quad \text{ゆえに } Y = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{X - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12} \quad \dots\dots ②$$

ここで、 α, β は異なる2つの実数で、 s の2次方程式

$$s^2 - (\alpha + \beta)s + \alpha\beta = 0$$

の2つの解であるから、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\} \\ &= 2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$① \text{ より } 2\left(3Y - \frac{1}{4}\right) - \left(3X - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \quad \dots ③'$$

$$\text{ゆえに } Y > \frac{3}{2}\left(X - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \quad \dots\dots ③$$

次に②, ③を満たす X の範囲を求める。

$$③ \text{ より } Y > 0 \text{ であるから, } 3X - \frac{1}{2} = t \text{ とおくと}$$

$$②', ③' \text{ から } t > 0, \quad 2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) - t^2 > 0$$

$$\text{第2式は } t^3 + t - 2 < 0 \text{ から } (t-1)(t^2 + t + 2) < 0$$

$$\text{ゆえに } 0 < t < 1 \text{ すなわち } \frac{1}{6} < X < \frac{1}{2} \quad \dots\dots ④$$

以上より、求める軌跡は双曲線 $Y = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{X - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12}$ の $\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$ の部分である。

