

問題 a を正の実数とし、 xy 平面上の放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) P における C の法線を l とし、 l と C の交点で P と異なるものを Q とする。

- (a) 法線 l の方程式を a を用いて表せ。
- (b) Q の x 座標を a を用いて表せ。
- (c) a が正の実数を動くとき、線分 PQ の長さが最小となる a の値を求めよ。

(東京理科大 2011 理(数, 物, 化)・2(1))

解答 (1)

(a) $y=x^2$ から $y'=2x$

点 $P(a, a^2)$ における法線の傾きは $-\frac{1}{2a}$ だから

その方程式は $y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$

$$\text{ゆえに } y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(b) $y=x^2$ と $\textcircled{1}$ から y を消去して

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2} \quad \text{から} \quad 2ax^2+x-2a^3-a=0$$

$$(x-a)(2ax+2a^2+1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=a, \quad -a-\frac{1}{2a}$$

P と異なる点 Q の x 座標は $-a-\frac{1}{2a}$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad PQ^2 &= \left\{ a - \left(-a - \frac{1}{2a} \right) \right\}^2 + \left\{ a^2 - \left(-a - \frac{1}{2a} \right)^2 \right\}^2 = \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{4a^2} \right)^2 \\ &= \frac{(4a^2+1)^2}{4a^2} + \frac{(4a^2+1)^2}{(4a^2)^2} = \frac{(4a^2+1)^3}{(4a^2)^2} \end{aligned}$$

ここで $4a^2=t$ とおくと $t>0$ であり、 $PQ^2=f(t)$ とおくと

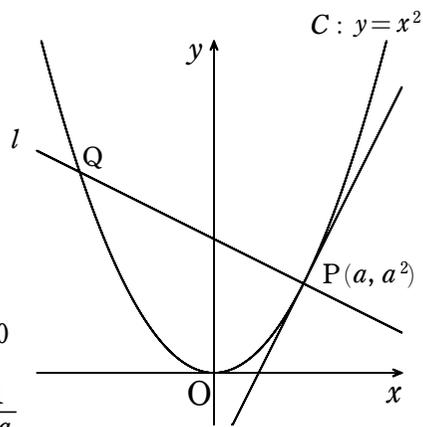
$$f(t) = \frac{(t+1)^3}{t^2} = t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}$$

$$f'(t) = 1 - \frac{3}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{t^3 - 3t - 2}{t^3} = \frac{(t-2)(t+1)^2}{t^3}$$

増減表は右ようになる。 $t=2$ のとき PQ^2 は

最小値 $\frac{27}{4}$ をとるから、 PQ は最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき

$$4a^2=2, \quad a>0 \quad \text{であるから} \quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



t	0	...	2	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗