

問題  $a$  を 1 より大きい定数とする。  $xy$  平面上の点  $(a\cos t, \sqrt{a^2-1}\sin t)$  と直線  $x+y=\sqrt{3}a$  の距離を  $f(t)$  とおく。  $t$  が  $0 \leq t \leq 2\pi$  の範囲を動くときの  $f(t)$  の最小値を  $m$  とする。

(1)  $m$  を  $a$  の関数として表せ。

(2) (1) で求めた  $a$  の関数  $m$  の最小値を求めよ。

(埼玉大 2011 前・理(数)3)

解答

(1) 点  $(a\cos t, \sqrt{a^2-1}\sin t)$  を  $P(x, y)$ ,

直線  $x+y=\sqrt{3}a$  を  $\ell$  とする。

$x=a\cos t, y=\sqrt{a^2-1}\sin t$  から

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となるから、  $0 \leq t \leq 2\pi$  のとき  $P$  は楕円  $\textcircled{1}$  上を動く。この楕円上の第 1 象限にある点で  $\ell$  に平行な接線の接点を  $Q(x_1, y_1)$  とする。

接線の方程式は  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{a^2-1} = 1$

この接線は  $\ell$  に平行、また  $Q$  は  $\textcircled{1}$  上にあるから

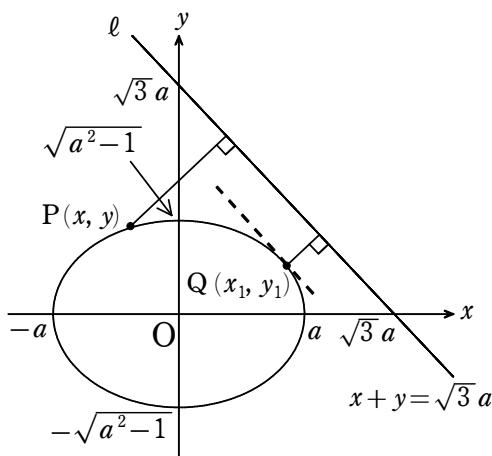
$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{y_1}{a^2-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2-1} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$  から  $x_1^2 = \frac{a^4}{2a^2-1}, x_1 > 0$  だから  $x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{2a^2-1}}, y_1 = \frac{a^2-1}{\sqrt{2a^2-1}}$

$P$  が  $Q$  に一致するとき  $f(t)$  は最小値  $m$  をとるから

$$m = \frac{|x_1 + y_1 - \sqrt{3}a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{2a^2-1} - \sqrt{3}a| = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1}) \quad \dots\dots \text{(答)}$$

ここで  $a > 1$  から  $\sqrt{3}a > \sqrt{2}a > \sqrt{2a^2-1}$  を用いた。



(2)  $m = g(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1})$  おくと

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{3} - \frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{3} - \sqrt{\frac{4}{2-\frac{1}{a^2}}} \right) \end{aligned}$$

$a$	1	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		↘	$\frac{1}{2}$	↗

$g'(a) = 0$  となるのは  $2 - \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3}$  から  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , 増減表は上のようになる。

したがって、  $m$  は  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{2}$  …(答) をとる。