

I m を実数とする。座標平面において、直線 $y = mx + 1$ と双曲線 $4x^2 - y^2 = 4$ が 2 つの異なる共有点をもつのは

$$|m| < \boxed{\text{ア}} \quad \text{ただし} \quad |m| \neq \boxed{\text{イ}} \quad \dots\dots \text{①}$$

のときであり、このとき、2 つの共有点と原点を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \boxed{\text{ウ}}$$

と表される。また、2 つの共有点を結ぶ線分の中点を $P(\alpha, \beta)$ とすると

$$\alpha = \boxed{\text{エ}}, \quad \beta = \boxed{\text{オ}}$$

である。 m が ① の範囲で変化するとき、点 P の軌跡は、方程式

$$\boxed{\text{カ}} x^2 + \boxed{\text{キ}} y^2 + y = 0$$

で表される曲線の、 $y \geq 1$ の部分と $y < \boxed{\text{ク}}$ の部分である。

(注: $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ は m の式, 他は数値を入れよ。)

解答

$$y = mx + 1 \quad \dots\dots ② \quad 4x^2 - y^2 = 4 \quad \dots\dots ③$$

②, ③ から y を消去すると

$$4x^2 - (mx + 1)^2 = 4$$

$$(m^2 - 4)x^2 + 2mx + 5 = 0 \quad \dots\dots ④$$

②, ③ が 2 つの異なる共有点をもつのは, ④ が

2 つの異なる実数解をもつときだから

$$m^2 - 4 \neq 0 \quad \text{かつ}$$

$$\frac{D}{4} = m^2 - 5(m^2 - 4) = -4m^2 + 20 > 0$$

$$\text{ゆえに } m^2 < 5 \quad \text{かつ} \quad m^2 \neq 4$$

$$\text{すなわち } |m| < \sqrt{5} \quad \text{ただし} \quad |m| \neq 2 \quad \dots\dots ①$$

このとき, ④ の 2 つの実数解を x_1, x_2 とすると

解と係数の関係から

$$x_1 + x_2 = -\frac{2m}{m^2 - 4}, \quad x_1 x_2 = \frac{5}{m^2 - 4}$$

2 つの共有点の座標は $(x_1, mx_1 + 1), (x_2, mx_2 + 1)$ だから, 求める三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2} |x_1(mx_2 + 1) - (mx_1 + 1)x_2| = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$$

$$\text{ここで } (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(-\frac{2m}{m^2 - 4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{5}{m^2 - 4} = \frac{16(-m^2 + 5)}{(m^2 - 4)^2}$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{2} |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{-m^2 + 5}}{|m^2 - 4|}$$

2 つの共有点を結ぶ線分の中点を $P(\alpha, \beta)$ とすると

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{m}{m^2 - 4}, \quad \beta = m\alpha + 1 = -\frac{4}{m^2 - 4}$$

$$\begin{aligned} \text{これから } \alpha^2 - \frac{1}{4}\beta^2 &= \left(-\frac{m}{m^2 - 4}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{m^2 - 4}\right)^2 = \frac{1}{m^2 - 4} \\ &= -\frac{1}{4}\beta \end{aligned}$$

また $\beta = -\frac{4}{m^2 - 4}$ ($0 \leq m^2 < 5, m^2 \neq 4$), グラフより

$$\beta \geq 1, \beta < -4$$

すなわち, P の軌跡は

$$4x^2 - y^2 + y = 0 \quad (y \geq 1, y < -4)$$

である。

