

第2問

実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし、座標平面上の4点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(t, 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle ACO = \angle BCD$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

解答 直線 $x=t$ に関して A と対称な点を A' とすると、その座標は $(2t, 1)$ であり、 $\angle ACO = \angle A'CB$ であるから、 $A'C$ と AB の交点が D となる。また、 D から x 軸に垂線を引き、交点を E とする。 $\triangle DCB \sim \triangle DA'A$ より

$$DB : DA = CB : A'A = (1-t) : 2t$$

$$\text{ゆえに } DE = AO \times \frac{1-t}{(1-t)+2t} = \frac{1-t}{1+t}$$

$$\triangle ACD = \triangle ACB - \triangle DCB = \frac{1}{2}CB \times (AO - DE)$$

$$= \frac{1}{2}(1-t) \left(1 - \frac{1-t}{1+t}\right) = -\frac{t^2-t}{t+1}$$

$$= -\frac{(t+1)(t-2)+2}{t+1} = -(t-2) - \frac{2}{t+1} = 3 - (t+1) - \frac{2}{t+1}$$

ここで $(t+1) + \frac{2}{t+1} \geq 2\sqrt{(t+1) \cdot \frac{2}{t+1}} = 2\sqrt{2}$ であるから、 $\triangle ACD$ の面積は

$t+1 = \frac{2}{t+1}$ すなわち $t = \sqrt{2} - 1$ のとき、最大値 $3 - 2\sqrt{2}$ をとる。

