

[6] 2つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $H: x^2 - y^2 = -1$ を考える。双曲線 H 上の点 $P(s, t)$ に対して、方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を ℓ とする。

- (1) 直線 ℓ は点 P を通らないことを示せ。
- (2) 直線 ℓ と双曲線 C は異なる2点 Q, R で交わることを示し、 $\triangle PQR$ の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。
- (3) (2)における3点 G, Q, R に対して、 $\triangle GQR$ の面積は点 $P(s, t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

解答 $x^2 - y^2 = 1$ ……①, $x^2 - y^2 = -1$ ……②, $sx - ty = 1$ ……③

とする。また、 $P(s, t)$ は H 上にあることから $s^2 - t^2 = -1$ ……④

- (1) ℓ が P を通るための必要十分条件は $s^2 - t^2 = 1$ であるが、これは④に反する。
したがって ℓ は P を通らない。

- (2) ④から $s^2 = t^2 - 1 \geq 0$ ゆえに $|t| \geq 1$

③から $y = \frac{s}{t}x - \frac{1}{t}$ ……③'

①, ③' から y を消去すると

$$x^2 - \left(\frac{s}{t}x - \frac{1}{t}\right)^2 = 1$$

$$(t^2 - s^2)x^2 + 2sx - t^2 - 1 = 0$$

④を用いて $x^2 + 2sx = t^2 + 1$

$$(x+s)^2 = s^2 + t^2 + 1$$

$$(x+s)^2 = 2t^2 \text{ よって } x = -s \pm \sqrt{2}t$$

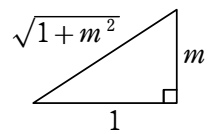
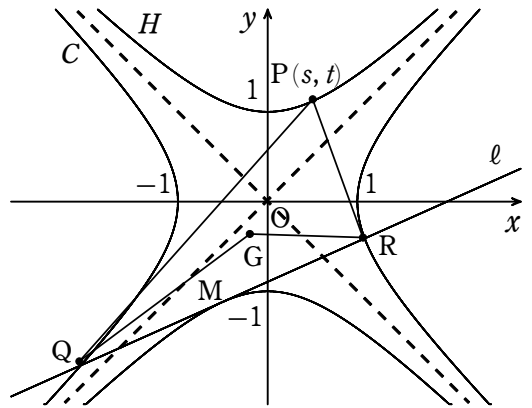
すなわち、 ℓ と C は異なる2点で交わる。線分 QR の中点を M とすると、その x 座標は $-s$, y 座標は③'から $y = -\frac{s^2}{t} - \frac{1}{t} = -\frac{t^2}{t} = -t$

すなわち $M(-s, -t)$, G は中線 PM を $2:1$ に内分する点だから $G\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)$

(3) P と ℓ の距離を d とすると $d = \frac{|s^2 - t^2 - 1|}{\sqrt{s^2 + (-t)^2}} = \frac{2}{\sqrt{s^2 + t^2}}$

また $QR = 2 \cdot |\sqrt{2}t| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{s}{t}\right)^2} = 2\sqrt{2} \sqrt{s^2 + t^2}$

よって $\triangle PQR = \frac{1}{2}d \cdot QR = 2\sqrt{2}$ から $\triangle GQR = \frac{1}{3}\triangle PQR = \frac{2\sqrt{2}}{3}$



参考 ℓ は点 $(-s, -t)$ における H の接線, PQ, PR は C の接線になる。このことは C, H を

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ に代えても成り立ち, } \triangle PQR = 2\sqrt{2}ab \text{ である。}$$