

問題 横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形と元の長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし、長方形の中心とはその2つの対角線の交点とし、長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また、回転角 θ は 0 以上、長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下に取るものとする。

解答 もとの長方形を $ABCD$, 回転後の長方形を $A'B'C'D'$, 中心を O , 辺どうしの交点を図のように E, F, G, H, I, J, K, L とする。また, $AB=2a, AD=2b$ とおく。

AB と OA' の交点を P とすると, $\triangle PFA'$ と $\triangle POA$ において, $\angle PA'F = \angle PAO$ だから

$$\angle PFA' = \angle POA = \theta$$

点 F, H, J, L において対頂角となる 8 つの直角三角形の内角はすべて θ となる。また, 図形は直線 FJ, HL に関して線対称だから

$$\triangle A'FE \equiv \triangle BFG \equiv \triangle C'JI \equiv \triangle DJK, \triangle ALE \equiv \triangle B'HG \equiv \triangle CHI \equiv \triangle D'LK$$

$BF=x, AL=y$ とおくと,

$$BF + FE + EA = BA \quad \text{から}$$

$$x + \frac{x}{\cos \theta} + y \tan \theta = 2a$$

よって $(1 + \cos \theta)x + (\sin \theta)y = 2a \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$

$$AL + LK + KD = AD \quad \text{から}$$

$$y + \frac{y}{\cos \theta} + x \tan \theta = 2b$$

よって $(\sin \theta)x + (1 + \cos \theta)y = 2b \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を連立して解くと

$$x = a - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} b, \quad y = -\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} a + b$$

したがって

$$S(\theta) = \text{長方形} ABCD - 2(\triangle BFG + \triangle ALE)$$

$$= 2a \cdot 2b - 2 \left(\frac{1}{2} x^2 \tan \theta + \frac{1}{2} y^2 \tan \theta \right) = 4ab - (x^2 + y^2) \tan \theta$$

$$\text{ここで } x^2 + y^2 = \left(a - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} b \right)^2 + \left(-\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} a + b \right)^2$$

$$= \left\{ 1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 \right\} (a^2 + b^2) - \frac{4 \sin \theta}{1 + \cos \theta} ab$$

$$= \frac{2}{1 + \cos \theta} (a^2 + b^2) - \frac{4(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} ab$$

$$\text{よって } S(\theta) = 4ab - \frac{2 \tan \theta}{1 + \cos \theta} (a^2 + b^2) + \frac{4(1 - \cos \theta) \tan \theta}{\sin \theta} ab$$

$$= \frac{4}{\cos \theta} ab - \frac{2(1 - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} (a^2 + b^2)$$

