

第4問

△ABCにおいて∠BAC=90°, $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ とする。△ABCの内部の点Pが

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0}$$

を満たすとす。

- (1) ∠APB, ∠APC を求めよ。
 (2) $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$, $|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。

これは筆記を簡単にするため

解答 $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ また $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ とおくと

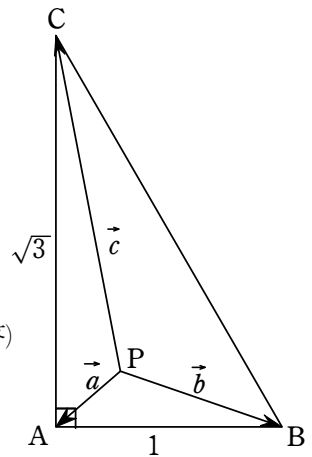
Pについての条件は $\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b} + \frac{\vec{c}}{c} = \vec{0}$ となる。

(1) $\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b} = -\frac{\vec{c}}{c}$ から $\left| \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b} \right|^2 = \left| -\frac{\vec{c}}{c} \right|^2$

$$\frac{|\vec{a}|^2}{a^2} + 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} + \frac{|\vec{b}|^2}{b^2} = \frac{|\vec{c}|^2}{c^2} \quad \text{すなわち} \quad 1 + 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} + 1 = 1$$

したがって $\cos \angle APB = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = -\frac{1}{2}$ から $\angle APB = 120^\circ$ ……(答)

同様に $\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}}{c} = -\frac{\vec{b}}{b}$ から $\angle APC = 120^\circ$ ……(答)



この結果を出すには $\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0}$ のみを用い

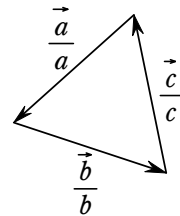
∠BAC=90°, $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ の条件は必要ありません。

$\frac{\vec{a}}{a}$, $\frac{\vec{b}}{b}$, $\frac{\vec{c}}{c}$ が単位ベクトルであり, 和が $\vec{0}$ であることに注意

すると, 右図のように正三角形をつくることから, 互いになす角がすべて 120° であることは自明といえます。

点Pは三角形のフェルマ点(等角中心)といわれるものです。

フェルマ点については, [Wikipedia](#) などに要領のよい解説があります。



- (2) △PABについて正弦定理を用いると

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = 1^2 \quad \text{から} \quad a^2 + b^2 + ab = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

△PBC, △PCAについても同様にすると

$$b^2 + c^2 + bc = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$c^2 + a^2 + ca = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

図形的な性質を用いると巧みな解法がありますが、ここでは純粋に①～③の3元連立2次方程式を解いてみたいと思います。現在の高校生はあまり経験がないと思いますが、筆者が高校生であった数十年前にはよく出ていて、懐かしいのでやってみます。ただ解き方を思い出すのにかなり時間がかかりました。

$\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA = \triangle ABC$ から $ab + bc + ca = 2$ が得られます。これと①～③を組み合わせると、やや楽になります。

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{3} \text{ から } 2a^2 + 3b^2 - c^2 + 3ab - ca = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 4 - \textcircled{2} \text{ から } 4a^2 + 3b^2 - c^2 + 4ab - bc = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④, ⑤の両辺を a ($a > 0$) で割り, $\frac{b}{a} = x, \frac{c}{a} = y$ とおくと

$$3x^2 - y^2 + 3x - y + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}'$$

$$3x^2 - y^2 - xy + 4x + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}'$$

$$\textcircled{4}' - \textcircled{5}' \text{ から } xy - x - y - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

④', ⑥を連立して x, y を求める。

$$\textcircled{6} \text{ から } (x-1)y = x+2, \quad x=1 \text{ は解ではないから } x \neq 1$$

$$\text{よって } y = \frac{x+2}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{6}'$$

⑥' を④' に代入して

$$3x^2 + 3x - \frac{x+2}{x-1} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1} + 1 \right) + 2 = 0$$

$$(3x^2 + 3x + 2)(x-1)^2 - (x+2)(2x+1) = 0$$

$$3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2)(x^2+x+1) = 0$$

$$x > 0 \text{ から } x=2, \quad \textcircled{6}' \text{ から } y=4 \text{ すなわち } b=2a, \quad c=4a$$

$$\text{これらと } \textcircled{1} \text{ から } a^2 + (2a)^2 + a \cdot 2a = 1 \text{ よって } a^2 = \frac{1}{7}, \quad a > 0 \text{ から}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad c = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

解法のポイントその1

…定数項の消去

これで因数分解できると

楽なのだが…

解法のポイントその2

…同次方程式の扱い

これで2元連立2次になった

解法のポイントその3

…1文字消去

ただし高次になってしまう

対応する2組の角が等しいことから $\triangle PAB \sim \triangle PBC$ がいえます。これに気付くと

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{2}{1} \text{ と } \textcircled{1} \text{ から直ちに解答できます。}$$

(1), (2)とも、図形的な意味を考えたり、固有の図形的性質に気付くと非常に簡単ですが、計算だけに頼ろうとすると、とっても大変な問題だといえるでしょう。