

**問題**  $O$  を原点とする座標平面上の円  $x^2+y^2-10x-10y+49=0$  を  $C$  とする。原点  $O$  を通り、円  $C$  に接する直線のうち、傾きの大きいほうを  $\ell$  とする。

- (1)  $\ell$  の傾きを求めよ。
- (2)  $x$  軸に接し、円  $C$  と外接するような円の中心  $P$  の描く軌跡を求めよ。
- (3) 直線  $\ell$  と  $x$  軸に接し、更に円  $C$  と外接する円の半径をすべて求めよ。

**解答** 円  $C$  の方程式は  $(x-5)^2+(y-5)^2=1$  となり、中心を  $A$  とすると  $A(5, 5)$ 、半径は  $1$  である。

- (1)  $\ell$  の傾きを  $m$  とし、その方程式を  $y=mx$  すなわち  $mx-y=0$  とする。 $\ell$  が  $C$  に接するには、 $A$  と  $\ell$  の距離が半径に等しければよいから

$$\begin{aligned} \frac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}} &= 1 \\ \{5(m-1)\}^2 &= m^2+1 \\ 12m^2-25m+12 &= 0 \\ m &= \frac{4}{3}, \frac{3}{4} \end{aligned}$$

したがって  $\ell$  の傾きは  $\frac{4}{3}$

- (2) 求める円を  $C'$  とし、その中心を  $P(x, y)$  とすると、 $x$  軸に接する

ことから半径は  $|y|$  であり、さらに  $C$  と外接するから

$$\begin{aligned} y > 0 \quad \text{また} \quad AP = y+1 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2} &= y+1 \\ (x-5)^2+(y-5)^2 &= (y+1)^2 \quad \text{よって} \quad y = -\frac{1}{12}(x-5)^2+2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①は  $y > 0$  も満たすから、①が  $P$  の描く軌跡の方程式である。

- (3) まず 2 直線  $\ell$  と  $x$  軸の角の 2 等分線を求める。 $\ell$  が  $x$  軸の正の向きとなす鋭角を  $2\theta$  とすると

$$\tan 2\theta = \frac{4}{3} \quad \text{これから} \quad \frac{2\tan \theta}{1-\tan^2 \theta} = \frac{4}{3}, \quad 2\tan^2 \theta + 3\tan \theta - 2 = 0$$

$$\text{よって} \quad \tan \theta = \frac{1}{2}, -2, \quad \tan \theta > 0 \quad \text{であるから} \quad \tan \theta = \frac{1}{2}$$

$\ell$  と  $x$  軸の角の 2 等分線は 2 本あり、互いに直交するからその方程式は  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = -2x$

$P$  がこの角の 2 等分線上にあり、さらに ① の軌跡上にあれば、 $\ell$  と  $x$  軸に接し  $C$  に外接する。

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{と} \quad \textcircled{1} \quad \text{の交点の} \quad x \quad \text{座標は} \quad \frac{1}{12}(x-5)^2+2 = \frac{1}{2}x \quad \text{から} \quad x = 8 \pm \sqrt{15}$$

$$\text{よって求める円の半径は} \quad y = \frac{1}{2}x = \frac{8 \pm \sqrt{15}}{2}$$

同様に  $y = -2x$  と ① から  $x = -7$ , 求める円の半径は  $y = 14$

