

問題

O を原点とする xyz 空間内の平面上に平行四辺形 ABCD があり、3 点 B, C, D の座標は $B(1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $D(0, 0, d)$ ($d > 0$) である。辺 BC の中点を M, 辺 CD を 5 : 1 に内分する点を N, BN と DM の交点を G とするとき、次の問いに答えよ。問い (1) では にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) (i) \vec{AG} を \vec{AB} , \vec{AD} を用いて表すと $\vec{AG} = \text{} \vec{AB} + \text{} \vec{AD}$ である。

(ii) $\angle DAG = \frac{\pi}{6}$ とするとき、点 A の座標は (, ,), d の値は である。

(2) A, d は (1) で求めた座標, 値とする。平行四辺形 ABCD を底面とする四角錐 O-ABCD を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答

(1) (i) $\vec{AG} = \frac{2}{7} \vec{AB} + \frac{6}{7} \vec{AD}$ (ii) $A(1, -\sqrt{3}, 3\sqrt{2}), d = 3\sqrt{2}$

(2) 平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 3\sqrt{2}$) と線分 OA, AB, CD, OD との交点をそれぞれ P, Q, R, S とすると、 $S(0, 0, t)$ であり、Q は AB を、R は DC をそれぞれ $(3\sqrt{2} - t) : t$ に内分する点だから

$$Q\left(1, -\frac{1}{\sqrt{6}}t, t\right), R\left(0, \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}t, t\right)$$

また $SQ^2 = \frac{1}{6}t^2 + 1$

$$SR^2 = \frac{1}{6}t^2 - \sqrt{2}t + 3 = \frac{1}{6}(t - 3\sqrt{2})^2$$

$$SQ^2 - SR^2 = \sqrt{2}(t - \sqrt{2})$$

台形 PQRS を z 軸の周りに 1 回転させてできる円の面積を $S(t)$ とすると

$0 \leq t \leq \sqrt{2}$ のとき $SQ \leq SR$ より

$$S(t) = \pi \cdot \frac{1}{6}(t - 3\sqrt{2})^2$$

$$\sqrt{2} \leq t \leq 3\sqrt{2} \text{ のとき } S(t) = \pi \left(\frac{1}{6}t^2 + 1 \right)$$

したがって、求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{3\sqrt{2}} S(t) dt = \frac{\pi}{6} \int_0^{\sqrt{2}} (t - 3\sqrt{2})^2 dt + \pi \int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6}t^2 + 1 \right) dt \\ &= \frac{\pi}{18} \left[(t - 3\sqrt{2})^3 \right]_0^{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{18} \left[t^3 + 18t \right]_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} = \frac{19\sqrt{2}}{9} \pi + \frac{44\sqrt{2}}{9} \pi = 7\sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

