

問題 2次関数  $y = x^2 - 1$  のグラフ上の点  $(1, 0)$  における接線を  $l$  とする。直線  $l$  と点  $(1, 0)$  で接する円  $C$  の方程式は、実数  $t$  を用いて

$$(x + \boxed{\text{ヌ}} t + \boxed{\text{ネ}})^2 + (y - t)^2 = \boxed{\text{ノ}} t^2$$

と表される。円  $C$  と放物線  $y = x^2 - 1$  の共有点の個数が 2 個となる  $t$  は小さい順に

$\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$  と  $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$  である。

解答  $f(x) = x^2 - 1$  とすると  $f'(x) = 2x$ ,  $f'(1) = 2$  であるから

点  $(1, 0)$  を通り  $l$  に垂直な直線  $m$  の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{から} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

円  $C$  の中心は  $m$  上にあり、中心の  $y$  座標は  $t$  だから、 $x$  座標は

$$t = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{から} \quad x = -2t + 1$$

中心  $(-2t + 1, t)$  と点  $(1, 0)$  の距離が円の半径  $r$  であるから

$$r^2 = (-2t + 1 - 1)^2 + t^2 = 5t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

よって、求める円  $C$  の方程式は

$$(x + 2t - 1)^2 + (y - t)^2 = 5t^2 \quad \text{ヌ} \dots 2, \text{ネ} \dots -1, \text{ノ} \dots 5$$

$y = x^2 - 1$  と  $\textcircled{1}$  から  $y$  を消去すると

$$(x + 2t - 1)^2 + (x^2 - t)^2 = 5t^2$$

$$x^4 + (-2t - 1)x^2 + (4t - 2)x - 2t + 2 = 0 \quad \leftarrow \text{重解 } x=1 \text{ をもつ}$$

$$(x - 1)^2(x^2 + 2x - 2t + 2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  の実数解が、放物線と  $C$  の共有点の  $x$  座標であるから、 $\textcircled{2}$  が異なる 2 個の実数解をもてばよい。そのためには

$$x^2 + 2x - 2t + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{すなわち } (x + 1)^2 = 2t - 1$$

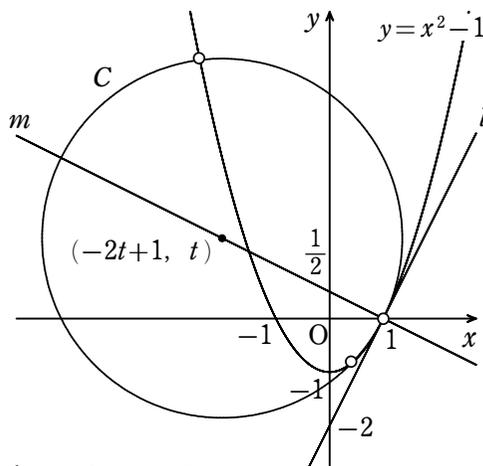
とすると

(i)  $\textcircled{3}$  が 1 以外の重解をもつ (ii)  $\textcircled{3}$  が 1 と 1 以外の解をもつ

(i) のとき  $t = \frac{1}{2}$ , このとき重解は  $-1$  で条件を満たす。

(ii) のとき  $x = 1$  を  $\textcircled{3}$  に代入して  $t = \frac{5}{2}$ , このとき他の解は  $-3$  で条件を満たす。

ハ... 1, ヒ... 2, フ... 5, ヘ... 2



1	1	0	$-2t - 1$	$4t - 2$	$-2t + 2$
	1	1	$-2t$	$2t - 2$	
1	1	1	$-2t$	$2t - 2$	0
	1	2	$-2t + 2$		
1	2	$-2t + 2$			0