

第6問

座標平面の原点を  $O$  で表す。

線分  $y = \sqrt{3}x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 上の点  $P$  と、線分  $y = -\sqrt{3}x$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ) 上の点  $Q$  が、線分  $OP$  と線分  $OQ$  の長さの和が  $6$  となるように動く。このとき、線分  $PQ$  の通過する領域を  $D$  とする。

- (1)  $s$  を  $0 \leq s \leq 2$  をみたす実数とすると、点  $(s, t)$  が  $D$  に入るような  $t$  の範囲を求めよ。
- (2)  $D$  を図示せよ。

解答

- (1)  $P(p, \sqrt{3}p)$ ,  $Q(q, -\sqrt{3}q)$  ( $0 \leq p \leq 2$ ,  $-2 \leq q \leq 0$ ) とおく。

$$OP + OQ = 6 \quad \text{から} \quad 2p + (-2q) = 6$$

$$\text{よって} \quad q = p - 3$$

また  $0 \leq p \leq 2$  および  $-2 \leq p - 3 \leq 0$  から  $1 \leq p \leq 2$

線分  $PQ$  の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}p + \sqrt{3}q}{p - q}(x - p) + \sqrt{3}p \quad (q \leq x \leq p)$$

$$\text{すなわち} \quad y = \frac{2p - 3}{\sqrt{3}}x + \frac{-2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad (p - 3 \leq x \leq p)$$

点  $(s, t)$  が  $D$  に入るためには

$$t = \frac{2p - 3}{\sqrt{3}}s + \frac{-2p^2 + 6p}{\sqrt{3}}$$

$$\text{かつ} \quad 0 \leq s \leq 2, \quad p - 3 \leq s \leq p, \quad 1 \leq p \leq 2$$

をみたす  $p$  が存在すればよい。

$0 \leq s \leq 2$  の範囲で  $s$  の値を固定して考え、 $1 \leq p \leq 2$  かつ  $s \leq p \leq s + 3$  として

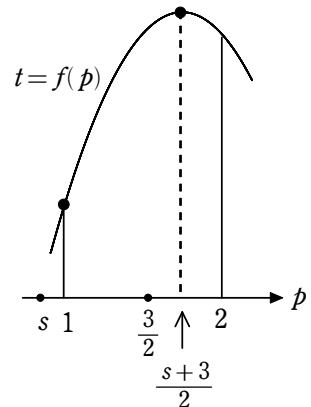
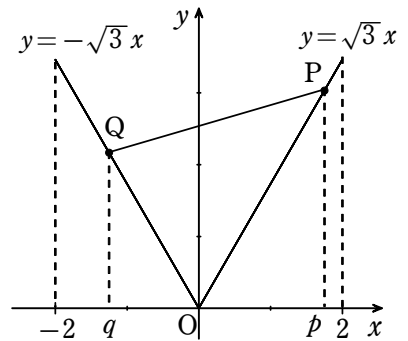
$$t = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(p - \frac{s + 3}{2}\right)^2 + \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}}$$

の値の範囲を求める。上式の右辺を  $f(p)$  とする。

- (i)  $0 \leq s \leq 1$  のとき、 $\frac{3}{2} \leq \frac{s + 3}{2} \leq 2$  であるから

$$f(1) \leq t \leq f\left(\frac{s + 3}{2}\right)$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{-s + 4}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}}$$



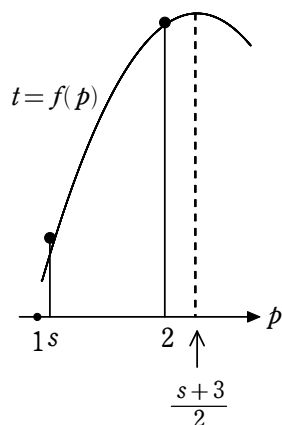
(ii)  $1 \leq s \leq 2$  のとき,  $2 \leq \frac{s+3}{2} \leq \frac{5}{2}$  であるから

$$f(s) \leq t \leq f(2)$$

$$\text{すなわち } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s+4}{\sqrt{3}}$$

(i), (ii) をまとめると

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \text{ のとき } \frac{-s+4}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}} \\ 1 \leq s \leq 2 \text{ のとき } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s+4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



(2)  $D$  は(1)の結果から, 連立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \frac{-x+4}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}} \quad \text{または} \quad 1 \leq x \leq 2, \sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x+4}{\sqrt{3}}$$

で表される領域, および, これを  $y$  軸に関して対称移動した領域で, 下図の斜線部分ただし境界線を含む。

