理系 2 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。t が $-1 \le t \le 0$ の範囲を動く とき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

文系 ③ 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。

- (1) 2点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) a は定数とし、直線 x=a と ℓ の交点の v 座標を t の関数と考えて f(t) とおく。 t が $-1 \le t \le 0$ の範囲を動くときの f(t) の最大値を a を用いて表せ。
- (3) t が $-1 \le t \le 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積 を求めよ。

文系3の解答

(1) $P(t, t^2)$ を通り、傾きが $\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}=2t+1$ だから、 ℓ の方程式は $v-t^2=(2t+1)(x-t)$ \$ > \(\tau = (2t+1)x-t^2-t \)

(2) $-1 \le t \le 0$ における f(t) の最大値を M(a) とする。

$$f(t) = (2t+1)a - t^2 - t = -t^2 + (2a-1)t + a = -\left(t - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4}$$

(i)
$$\frac{2a-1}{2} \le -1 \implies a \le -\frac{1}{2} \implies M(a) = f(-1) = -a$$

$$(ii) \quad -1 \underline{\leq} \frac{2a-1}{2} \underline{\leq} 0 \text{ すなわち} - \frac{1}{2} \underline{\leq} a \underline{\leq} \frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \textit{M}(a) = \textit{f}\Big(\frac{2a-1}{2}\Big) = a^2 + \frac{1}{4}$$

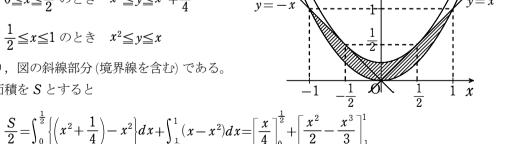
(iii)
$$0 \le \frac{2a-1}{2}$$
 + tab tab

- (3) t が $-1 \le t \le 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を F とする。
 - P、Q は下に凸な放物線 $y=x^2$ 上にあるから、F はこの放物線の上側にあり、題意より y 軸に 関して対称である。 $0 \le x \le 1$ の範囲で考えると
 - (2) より F を表す不等式は

$$0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ のとき } x^2 \le y \le x^2 + \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} \le x \le 1 \text{ のとき } x^2 \le y \le x$$

となり、図の斜線部分(境界線を含む)である。

Fの面積を**S**とすると



$$\frac{3}{2} = \int_{0} \left\{ \left(x^{2} + \frac{1}{4} \right) - x^{2} \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x - x^{2}) dx =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24} \quad \text{for } S = \frac{5}{12}$$