

理系 ② 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。 t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

文系 ③ 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。

- (1) 2 点 P , Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) a は定数とし、直線 $x=a$ と ℓ の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。 t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ。
- (3) t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

文系 ③ の解答

- (1) $P(t, t^2)$ を通り、傾きが $\frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t} = 2t+1$ だから、 ℓ の方程式は

$$y - t^2 = (2t+1)(x - t) \quad \text{よって} \quad y = (2t+1)x - t^2 - t$$

- (2) $-1 \leq t \leq 0$ における $f(t)$ の最大値を $M(a)$ とする。

$$f(t) = (2t+1)a - t^2 - t = -t^2 + (2a-1)t + a = -\left(t - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4}$$

(i) $\frac{2a-1}{2} \leq -1$ すなわち $a \leq -\frac{1}{2}$ のとき $M(a) = f(-1) = -a$

(ii) $-1 \leq \frac{2a-1}{2} \leq 0$ すなわち $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき $M(a) = f\left(\frac{2a-1}{2}\right) = a^2 + \frac{1}{4}$

(iii) $0 \leq \frac{2a-1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2} \leq a$ のとき $M(a) = f(0) = a$

- (3) t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を F とする。

P , Q は下に凸な放物線 $y = x^2$ 上にあるから、 F はこの放物線の上側にあり、題意より y 軸に関して対称である。 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で考えると

(2) より F を表す不等式は

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad x^2 \leq y \leq x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \text{のとき} \quad x^2 \leq y \leq x$$

となり、図の斜線部分 (境界線を含む) である。

F の面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - x^2 \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24} \quad \text{よって} \quad S = \frac{5}{12}$$

