

問題 座標平面上の楕円  $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$  …① を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 ① と直線  $y = x + a$  が交点をもつときの  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $|x| + |y| = 1$  を満たす点  $(x, y)$  全体がなす図形の概形をかけ。
- (3) 点  $(x, y)$  が楕円 ① 上を動くとき、 $|x| + |y|$  の最大値、最小値とそれを与える  $(x, y)$  をそれぞれ求めよ。

解答 (1) ① と  $y = x + a$  …② から  $y$  を消去して

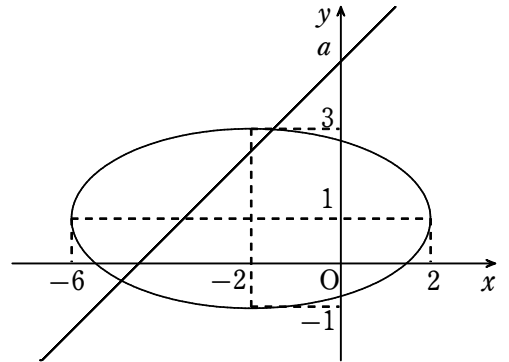
$$(x+2)^2 + 4(x+a-1)^2 = 16$$

$$5x^2 + 4(2a-1)x + 4(a^2 - 2a - 2) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

この判別式を  $D$  とすると、① と ② が交点をもつためには ③ が実数解をもてばよいから

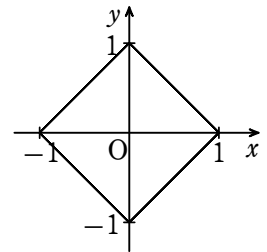
$$\frac{D}{4} = [2(2a-1)]^2 - 5 \cdot 4(a^2 - 2a - 2) \geq 0$$

$$a^2 - 6a - 11 \leq 0 \quad \text{よって} \quad 3 - 2\sqrt{5} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{5} \quad \dots \dots (\text{答})$$



- (2)  $|x| + |y| = 1$  …④ は  $y$  から  $-y$  への置き換え、および  $x$  から  $-x$  への置き換えに対し不変だから、④ の表す図形は  $x$  軸および  $y$  軸に関して対称である。

$x \geq 0, y \geq 0$  のとき ④ は  $x + y = 1$  となるから、上述のこととあわせて求める図形は右図のようになる。



- (3)  $|x| + |y| = k$  …⑤ とおくと、⑤ の表す図形は 4 点  $(k, 0), (0, k), (-k, 0), (0, -k)$  を頂点とする正方形である。⑤ と ① が共有点をもつときの  $k$  の最大値と最小値を考えればよい。

$k$  が最大となるのは、⑤ と ① が第 2 象限で接するときで、(1) より  $k = 3 + 2\sqrt{5}$  となる。接点の座標は  $a = 3 + 2\sqrt{5}$  のときの ③ の重解から

$$x = -\frac{2(2a-1)}{5} = \frac{-10 - 8\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{また} \quad y = a - |x| = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}$$

$k$  が最小となるのは、点  $(0, -k)$  が ① 上にあるときで  $k = -1 + \sqrt{3}$  となる。

以上から  $|x| + |y|$  は

$$x = \frac{-10 - 8\sqrt{5}}{5}, \quad y = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \quad \text{のとき最大値} \quad 3 + 2\sqrt{5}$$

$$x = 0, \quad y = 1 - \sqrt{3} \quad \text{のとき最小値} \quad -1 + \sqrt{3} \quad \text{をとる。}$$

