

**問題** 座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が  $x$  軸または  $y$  軸に平行な正方形がある。円周上の点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  (ただし  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする  $\theta$  を求めよ。

**解答**  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(0, 1)$ ,

また、 $P$  における接線と辺  $BA$ ,  $BC$  との交点をそれぞれ  $Q$ ,  $R$  とする。円外の点  $Q$ ,  $R$  からそれぞれ円にひいた 2 つの接線の長さは等しいから

$$QP=QA, \quad RP=RC$$

したがって、 $\triangle QBR$  の 3 辺の長さの和は

$$\begin{aligned} QR+BQ+BR &= (QP+RP)+BQ+BR \\ &= (QA+RC)+BQ+BR \\ &= BA+BC=2 \end{aligned}$$

となり一定である。

$$\angle QOA = \angle QOP = \frac{\theta}{2}, \quad \tan \frac{\theta}{2} = t \quad \text{とすると, } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \text{から } 0 < t < 1 \quad \text{であり}$$

$$PQ=t, \quad PR=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1-t}{1+t}$$

$\triangle QBR$  の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= 1 - 2(\triangle OPQ + \triangle OPR) = 1 - \left(t + \frac{1-t}{1+t}\right) = 2 - t - \frac{2}{1+t} \\ &= 3 - \left(1 + t + \frac{2}{1+t}\right) \end{aligned}$$

$1+t > 0$  から  $1+t + \frac{2}{1+t} \geq 2\sqrt{2}$ , 等号は  $1+t = \frac{2}{1+t}$  すなわち  $t = \sqrt{2} - 1$  のとき成り立つ。

$t = \sqrt{2} - 1$  のとき  $1+t + \frac{2}{1+t}$  は最小値  $2\sqrt{2}$  をとるから、このとき  $S$  は最大となり

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 1 \quad \text{よって } \theta = \frac{\pi}{4}$$

である。

