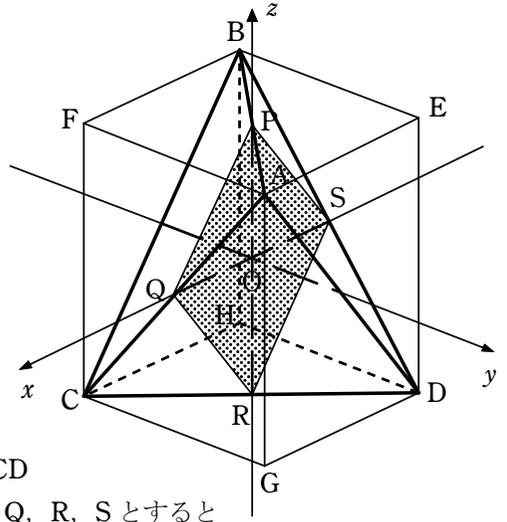


問題 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し, xyz 空間内の 4 点 $A(\cos \theta, \cos \theta, \sin \theta)$,

$B(-\cos \theta, -\cos \theta, \sin \theta)$, $C(\cos \theta, -\cos \theta, -\sin \theta)$, $D(-\cos \theta, \cos \theta, -\sin \theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$, この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする. このとき以下の各問いに答えよ.

- (1) $S\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $V\left(\frac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ.
- (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ.
- (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ.



解答 $\cos \theta = c$, $\sin \theta = s$ とおく. 4 点 $E(-c, c, s)$, $F(c, -c, s)$, $G(c, c, -s)$, $H(-c, -c, -s)$ をとり, 直方体 $AEBF-GDHC$ を考えると, この直方体の頂点を 1 つおきに結んだものが四面体 $ABCD$ である. AB , AC , DC , DB の中点をそれぞれ P , Q , R , S とすると

$$P(0, 0, s), Q(c, 0, 0), R(0, 0, -s), S(-c, 0, 0)$$

となり, P , R は z 軸上, Q , S は x 軸上にあつて, 四面体 $ABCD$ の xz 平面による切り口はひし形 $PQRS$ である. したがつて $S(\theta) = 4 \cdot \frac{1}{2} sc = \sin 2\theta$ ……①

また, 直方体 $AEBF-GDHC$ の体積を V_0 とすると

$$V_0 = (2c)^2 \cdot 2s = 8s(1-s^2) = 8 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

三角錐 $ABED$, $ABFC$, $CDGA$, $CDHB$ はすべて合同で体積は $\frac{1}{6}V_0$, これら 4 つの三角錐を直方体から除いたものが四面体 $ABCD$ であるから

$$V(\theta) = V_0 - 4 \cdot \frac{1}{6}V_0 = \frac{1}{3}V_0 = \frac{8}{3} \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \quad \dots\dots ②$$

- (1) $S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{8}{3} \sin \frac{\pi}{6} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}\right) = 1$
- (2) $0 < 2\theta < \pi$ であるから, ① より求める最大値は $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$
- (3) ② より $V = \frac{8}{3}s(1-s^2)$ とおくと,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } 0 < s < 1 \text{ であり } \frac{dV}{ds} = \frac{8}{3}(1-3s^2)$$

したがつて $V(\theta)$ は $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{18\sqrt{3}}{27}$ をとる.

s	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$\frac{dV}{ds}$		+	0	-	
V		↗	$\frac{16\sqrt{3}}{27}$	↘	