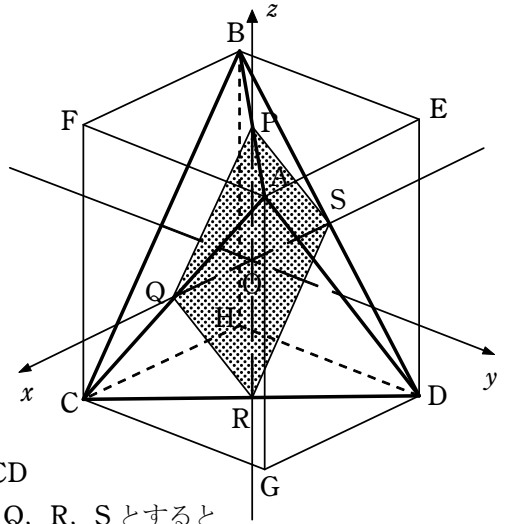


問題  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を満たす実数  $\theta$  に対し,  $xyz$  空間内の 4 点  $A(\cos \theta, \cos \theta, \sin \theta)$ ,

$B(-\cos \theta, -\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $C(\cos \theta, -\cos \theta, -\sin \theta)$ ,  $D(-\cos \theta, \cos \theta, -\sin \theta)$  を頂点とする四面体の体積を  $V(\theta)$ , この四面体の  $xz$  平面による切り口の面積を  $S(\theta)$  とする. このとき以下の各問いに答えよ.

- (1)  $S\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $V\left(\frac{\pi}{6}\right)$  をそれぞれ求めよ.
- (2)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  における  $S(\theta)$  の最大値を求めよ.
- (3)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  における  $V(\theta)$  の最大値を求めよ.



解答  $\cos \theta = c$ ,  $\sin \theta = s$  とおく. 4 点  $E(-c, c, s)$ ,  $F(c, -c, s)$ ,  $G(c, c, -s)$ ,  $H(-c, -c, -s)$  をとり, 直方体  $AEBF-GDHC$  を考えると, この直方体の頂点を 1 つおきに結んだものが四面体  $ABCD$  である.  $AB, AC, DC, DB$  の中点をそれぞれ  $P, Q, R, S$  とすると

$$P(0, 0, s), Q(c, 0, 0), R(0, 0, -s), S(-c, 0, 0)$$

となり,  $P, R$  は  $z$  軸上,  $Q, S$  は  $x$  軸上にあつて, 四面体  $ABCD$  の  $xz$  平面による切り口はひし形  $PQRS$  である. したがつて  $S(\theta) = 4 \cdot \frac{1}{2} sc = \sin 2\theta \dots\dots \textcircled{1}$

また, 直方体  $AEBF-GDHC$  の体積を  $V_0$  とすると

$$V_0 = (2c)^2 \cdot 2s = 8s(1-s^2) = 8 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

三角錐  $ABED, ABFC, CDGA, CDHB$  はすべて合同で体積は  $\frac{1}{6}V_0$ , これら 4 つの三角錐を直方体から除いたものが四面体  $ABCD$  であるから

$$V(\theta) = V_0 - 4 \cdot \frac{1}{6}V_0 = \frac{1}{3}V_0 = \frac{8}{3} \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \dots\dots \textcircled{2}$$

- (1)  $S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{8}{3} \sin \frac{\pi}{6} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}\right) = 1$
- (2)  $0 < 2\theta < \pi$  であるから, ① より求める最大値は  $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$
- (3) ② より  $V = \frac{8}{3}s(1-s^2)$  とおくと,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } 0 < s < 1 \text{ であり } \frac{dV}{ds} = \frac{8}{3}(1-3s^2)$$

したがつて  $V(\theta)$  は  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき最大値  $\frac{18\sqrt{3}}{27}$  をとる.

$s$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$\frac{dV}{ds}$		+	0	-	
$V$		↗	$\frac{16\sqrt{3}}{27}$	↘	