

第1問

[1] Oを原点とする座標平面上の2点P(2cosθ, 2sinθ), Q(2cosθ+cos7θ, 2sinθ+sin7θ)を考える。

ただし、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) OP= , PQ=  である。また

$$OQ^2 = \text{ウ} + \text{エ} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) = \text{ウ} + \text{エ} \cos(\text{オ} \theta) \text{ である。}$$

よって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、OQは $\theta = \frac{\pi}{\text{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\text{キ}}$ をとる。

(2) 3点O, P, Qが一直線上にあるようなθの値を求めよう。

直線OPを表す方程式は  である。 に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ①  $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 0$       ②  $(\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0$   
 ③  $(\cos \theta)x - (\sin \theta)y = 0$       ④  $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$

このときにより、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、3点O, P, Qが一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\text{ケ}}$ のときである

ことがわかる。

(3) ∠OQPが直角となるのはOQ= $\sqrt{\text{コ}}$ のときである。したがって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、∠OQPが

直角となるのは $\theta = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}\pi$ のときである。

解答

(1)  $\vec{OP} = (2\cos \theta, 2\sin \theta)$ ,  $\vec{OQ} = (2\cos \theta + \cos 7\theta, 2\sin \theta + \sin 7\theta)$  から  $\vec{PQ} = (\cos 7\theta, \sin 7\theta)$

$$OP = |\vec{OP}| = \text{2}, \quad PQ = |\vec{PQ}| = \text{1}$$

$$\begin{aligned} OQ^2 &= (2\cos \theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin \theta + \sin 7\theta)^2 \\ &= 4\cos^2 \theta + 4\cos \theta \cos 7\theta + \cos^2 7\theta + 4\sin^2 \theta + 4\sin \theta \sin 7\theta + \sin^2 7\theta \\ &= \text{5} + \text{4} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) = 5 + 4 \cos(\text{6} \theta) \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  より  $\frac{3\pi}{4} \leq 6\theta \leq \frac{3\pi}{2}$  であるから、 $OQ^2$ が最大となるのは  $\cos 6\theta = 0$ ,  $6\theta = \frac{3\pi}{2}$  のときである。

したがって、OQは $\theta = \frac{\pi}{\text{4}}$ のとき最大値 $\sqrt{\text{5}}$ をとる。

(2) 直線OPの方程式は  $y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x$  すなわち  $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$  ……

3点O, P, Qが一直線上にあるためには、点Qが直線OP上にあればよいから

$$\begin{aligned} \sin \theta (2\cos \theta + \cos 7\theta) - \cos \theta (2\sin \theta + \sin 7\theta) &= 0 \\ \sin 7\theta \cos \theta - \cos 7\theta \sin \theta &= 0 \quad \text{から} \quad \sin 6\theta = 0 \end{aligned}$$

$\frac{3\pi}{4} \leq 6\theta \leq \frac{3\pi}{2}$  より  $6\theta = \pi$  したがって  $\theta = \frac{\pi}{\text{6}}$

(3) ∠OQPが直角となるのはOQ= $\sqrt{\text{3}}$ のとき。

$$5 + 4\cos 6\theta = 3 \quad \text{から} \quad \cos 6\theta = -\frac{1}{2}$$

$\frac{3\pi}{4} \leq 6\theta \leq \frac{3\pi}{2}$  より  $6\theta = \frac{4\pi}{3}$  よって  $\theta = \frac{\text{2}}{\text{9}}\pi$

