

[4] 放物線 $y = x^2 + 4x$ 上の3点 $A(-4, 0)$, $B(1, 5)$, $P(p, p^2 + 4p)$ ($-4 < p < 1$) を考える。△ABPの外接円 C の中心の座標を (s, t) とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。
- (2) 線分 AP の垂直二等分線の方程式を求めよ。また、 s を p の式で表せ。
- (3) p が $-4 < p < 1$ の範囲を動くとき、 s のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) p が $-4 < p < 1$ の範囲を動くとき、円 C の半径の最小値とそのときの p の値を求めよ。

解答

(1) 線分 AB の傾きは1, 中点は $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ だから、 AB の垂直二等分線は

$$y - \frac{5}{2} = -\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad \text{から} \quad y = -x + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad (\text{答})$$

(2) 線分 AP の垂直二等分線上の点を $Q(x, y)$ とすると

$$QA = QP \quad \text{から} \quad QA^2 = QP^2 \quad \text{すなわち}$$

$$(x + 4)^2 + y^2 = (x - p)^2 + (y - p^2 - 4p)^2$$

$$8x + 16 = -2px + p^2 - 2(p^2 + 4p)y + (p^2 + 4p)^2$$

$$2(p + 4)x + 2p(p + 4)y = p^2 - 16 + p^2(p + 4)^2$$

$p + 4 \neq 0$ で両辺を割ると

$$2x + 2py = p - 4 + p^2(p + 4)$$

よって、 AP の垂直二等分線は

$$2x + 2py = p^3 + 4p^2 + p - 4 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad (\text{答})$$

△ABP の外接円 C の中心 (s, t) は、線分 AB , AP の垂直二等分線の交点だから

①, ② から y を消去して

$$2x + 2p(-x + 1) = p^3 + 4p^2 + p - 4 \quad \text{から} \quad -2(p - 1)x = (p^2 - 1)(p + 4)$$

$$p - 1 \neq 0 \quad \text{で両辺を割って} \quad x = -\frac{1}{2}(p + 1)(p + 4) \quad \text{すなわち} \quad s = -\frac{1}{2}(p + 1)(p + 4) \quad \dots\dots \textcircled{3} \quad (\text{答})$$

(3) $-4 < p < 1$ のとき ③ のグラフは右図となるから

$$-5 < s \leq \frac{9}{8} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4) △ABP の外接円 C の半径が最小となるのは、直径が AB になるときだから

$$\text{半径の最小値は} \quad \frac{1}{2}AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

このとき中心は AB の中点だから $s = -\frac{3}{2}$, これと ③ から

$$-\frac{1}{2}(p + 1)(p + 4) = -\frac{3}{2}, \quad p^2 + 5p + 1 = 0$$

$$-4 < p < 1 \quad \text{から} \quad p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{のとき, 最小値} \quad \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

