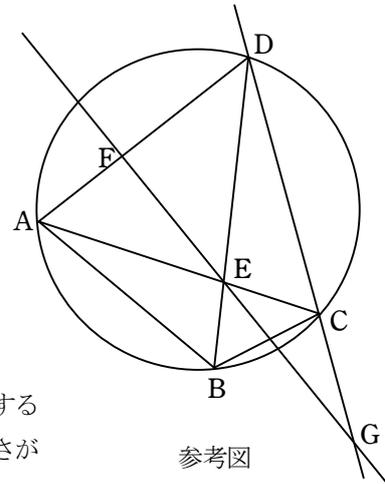


第5問 (選択問題)

四角形 ABCD において、 $AB = 4$ 、 $BC = 2$ 、 $DA = DC$  であり、4つの頂点 A、B、C、D は同一円周上にある。対角線 AC と対角線 BD の交点を E、線分 AD を 2:3 の比に内分する点を F、直線 FE と直線 DC の交点を G とする。



次の  には、下の ①～④ のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\angle ABC$  の大きさが変化するとき四角形 ABCD の外接円の大きさも変化することに注意すると、 $\angle ABC$  の大きさがいくらであっても、 $\angle DAC$  と大きさが等しい角は、 $\angle DCA$  と  $\angle DBC$  と  である。

- ①  $\angle ABD$                       ①  $\angle ACB$                       ②  $\angle ADB$   
 ③  $\angle BCG$                       ④  $\angle BEG$

このことより  $\frac{EC}{AE} = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$  である。次に、 $\triangle ACD$  と直線 FE に着目すると、 $\frac{GC}{DG} = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$  である。

(1) 直線 AB が点 G を通る場合について考える。

このとき、 $\triangle AGD$  の辺 AG 上に点 B があるので、 $BG = \text{カ}$  である。

また、直線 AB と直線 DC が点 G で交わり、4 点 A、B、C、D は同一円周上にあるので、

$DC = \text{キ} \sqrt{\text{ク}}$  である。

(2) 四角形 ABCD の外接円の直径が最小となる場合について考える。

このとき、四角形 ABCD の外接円の直径は  $\text{ケ}$  であり、 $\angle BAC = \text{コサ}^\circ$  である。

また、直線 FE と直線 AB の交点を H とするとき、 $\frac{GC}{DG} = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$  の関係に着目して AH を求めると、

$AH = \text{シ}$  である。

解答

DA=DCから  $\angle DAC = \angle DCA$ ,  $\widehat{DC}$ ,  $\widehat{DA}$  の円周角として

$$\angle DAC = \angle DBC, \quad \angle DCA = \boxed{\angle ABD} \leftarrow \textcircled{0}$$

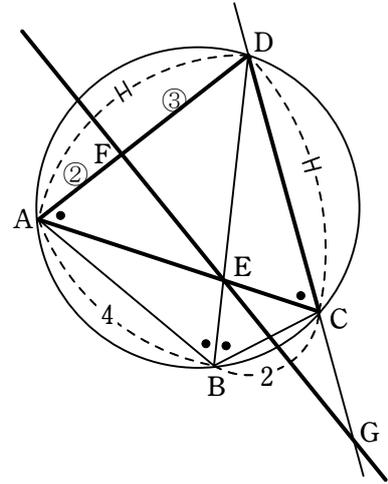
$\triangle ABC$  において BE は  $\angle B$  の二等分線であるから

$$\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

$\triangle ACD$  と直線 FE についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CG}{GD} \cdot \frac{DF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{CG}{GD} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{よって} \quad \frac{GC}{DG} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$



- (1) 直線 AB が点 G を通る場合

$\triangle AGD$  についてチェバの定理を用いると

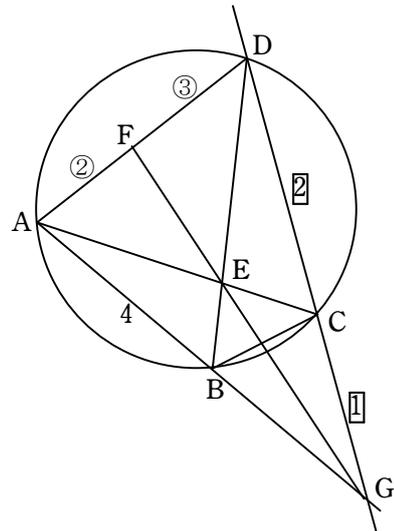
$$\frac{AB}{BG} \cdot \frac{GC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{4}{BG} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 1 \quad \text{よって} \quad BG = \boxed{3}$$

DC=x とおくと、方べきの定理により  $GA \cdot GB = GC \cdot GD$

$$\text{すなわち} \quad 7 \cdot 3 = \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x$$

$$\text{よって} \quad x^2 = 28 \quad \text{から} \quad DC = \boxed{2} \sqrt{\boxed{7}}$$



- (2) 四角形 ABCD の外接円の直径が最小となる場合

外接円の半径を  $R$ ,  $\angle ACB = \theta$  とすると、正弦定理から

$$2R = \frac{AB}{\sin \theta} \quad \text{すなわち} \quad 2R = \frac{4}{\sin \theta}$$

$2R$  が最小となるのは  $\sin \theta = 1$  すなわち  $\theta = 90^\circ$  のときで

外接円の直径は  $AB = \boxed{4}$  であり,

$\angle BAC = \boxed{30}^\circ$  である。

$\angle DCA = \angle DBA = 60^\circ \times \frac{1}{2} = 30^\circ = \angle BAC$  から  $DC \parallel AB$

$$\frac{GC}{DG} = \frac{1}{3} \quad \text{から} \quad AH : AB = CG : CD = 1 : 2 \quad \text{よって} \quad AH = \boxed{2}$$

