

1

(3) 複素数 $z (z \neq 0)$ に対して, $w = z + \frac{1}{z}$ とし, $w = x + yi$ (w の実部を x , 虚部を y) とする。ただし, i は虚数単位を表すものとする。

(a) 複素数平面上で点 z が半直線 $z = (1+2i)t (t > 0)$ 上を動くとする。このとき, $w = x + yi$ に対して

$$x = \frac{\square}{\square}t + t, \quad y = -\frac{\square}{\square}t + \square t$$

が成立し, 点 (x, y) は, 双曲線

$$\frac{\square}{\square}x^2 - \frac{\square}{\square}y^2 = 1$$

上を動く。

(b) k を正の実数とする。複素数平面上で点 z が半直線 $z = (1+ki)t (t > 0)$ 上を動くとき, 点 w が

$$|w+2| - |w-2| = 1$$

を満たすとする。このとき $k = \sqrt{\square}$ である。

解答

$$(a) \quad w = z + \frac{1}{z} = (1+2i)t + \frac{1}{(1+2i)t} = (1+2i)t + \frac{1-2i}{5t}$$

$$x = \frac{1}{5t} + t, \quad y = -\frac{2}{5t} + 2t \quad \text{から} \quad x^2 = \frac{1}{25t^2} + \frac{2}{5} + t^2, \quad \frac{y^2}{4} = \frac{1}{25t^2} - \frac{2}{5} + t^2$$

$$\text{よって} \quad x^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{4}{5} \quad \text{したがって} \quad \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{16}y^2 = 1$$

$$(b) \quad (a) \text{と同様にすると} \quad x = \frac{1}{(1+k^2)t} + t, \quad y = -\frac{k}{(1+k^2)t} + kt \quad \text{から}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{k^2} = \frac{4}{1+k^2} \quad \text{したがって} \quad \frac{1+k^2}{4}x^2 - \frac{1+k^2}{4k^2}y^2 = 1$$

$P(w)$, $F(2)$, $F'(-2)$ とすると $PF' - PF = 1$ だから, P は F, F' を焦点とする双曲線上を動く。

この双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ とすると

$$PF' - PF = 2a \quad \text{から} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{また} \quad \frac{1+k^2}{4} = \frac{1}{a^2}$$

$$\text{よって} \quad k^2 = 15, \quad k > 0 \quad \text{だから} \quad k = \sqrt{15}$$

補足

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{および} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \quad \text{から} \quad b^2 = \frac{15}{4} \quad \text{よって} \quad b = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$ すなわち $y = \pm \sqrt{15}x$ である。

半直線 $z = (1+ki)t (t > 0)$ が漸近線のひとつと推測できれば, 傾きから $k = \sqrt{15}$ がわかる。