

第4問

z を複素数とする。複素数平面上の3点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

解答

C は B を原点 O の周りで $\arg z$ だけ回転し、
 $OC=OB \times |z|$ とした点である。

3点 A, B, C は B が実軸上にないとき三角形をなす。

このとき

$$a=BC=|z^2-z|, \quad b=CA=|z^2-1|, \quad c=AB=|z-1|$$

とすると、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための必要十分条件は

$$b^2+c^2>a^2 \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad c^2+a^2>b^2 \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{かつ} \quad a^2+b^2>c^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。 $\textcircled{1}$ から

$$|z^2-1|^2+|z-1|^2>|z^2-z|^2 \quad \text{すなわち} \quad (z^2-1)(\bar{z}^2-1)+(z-1)(\bar{z}-1)>(z^2-z)(\bar{z}^2-\bar{z})$$

$$(z-1)(z+1)(\bar{z}-1)(\bar{z}+1)+(z-1)(\bar{z}-1)-z\bar{z}(z-1)(\bar{z}-1)>0$$

$$(z-1)(\bar{z}-1)\{z+1+\bar{z}+1-1-z\bar{z}\}>0$$

$$|z-1|^2(z+\bar{z}+2)>0$$

$$z \neq 1 \text{ であるから } |z-1|^2>0 \text{ よって } z+\bar{z}+2>0 \quad \dots \textcircled{1}'$$

同様に $\textcircled{2}$ から

$$(z-1)(\bar{z}-1)\{1+z\bar{z}-(z+1)(\bar{z}+1)\}>0$$

$$|z-1|^2(-z-\bar{z})>0 \text{ よって } z+\bar{z}<0 \quad \dots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{3}$ から

$$(z-1)(\bar{z}-1)\{z\bar{z}+(z+1)(\bar{z}+1)-1\}>0$$

$$|z-1|^2(2z\bar{z}+z+\bar{z})>0 \text{ よって } z\bar{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\bar{z}>0$$

$$\text{これから} \quad \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}\right)>\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{すなわち} \quad \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}'$$

x, y を実数として $z=x+yi$ とすると、 $\textcircled{1}'$, $\textcircled{2}'$ はそれぞれ

$$x+1>0 \quad \dots \textcircled{1}'', \quad x<0 \quad \dots \textcircled{2}''$$

$\textcircled{3}'$ は点 $-\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の外部を表す。

以上から求める範囲は右図の斜線部分で境界は含まない。

