

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。
ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

点 $P(t, t^2)$ における放物線 $y=x^2$ の接線を ℓ とすると、 ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{オ}}$ である。 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くときに ℓ が通過する領域を D とする。 D を図示するには、 x を固定して $y = \boxed{\text{オ}}$ を t の関数とみなし、 $0 \leq t \leq 1$ のときに y のとりうる値の範囲を調べればよい。すると、

$$x \leq 0 \text{ のとき } \boxed{\text{カ}} \leq y \leq \boxed{\text{キ}},$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } \boxed{\text{カ}} \leq y \leq \boxed{\text{ク}},$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき } \boxed{\text{キ}} \leq y \leq \boxed{\text{ク}},$$

$$1 \leq x \text{ のとき } \boxed{\text{キ}} \leq y \leq \boxed{\text{カ}}$$

である。

次に、 a を定数とし、点 $(0, a)$ を A とする。点 Q が領域 D 上を動くとき、線分 AQ の長さの最小値は

$$a \leq -1 \text{ のとき } \boxed{\text{ケ}},$$

$$-1 \leq a \leq 0 \text{ のとき } 0,$$

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } \boxed{\text{コ}},$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \text{ のとき } \boxed{\text{サ}},$$

$$\frac{3}{2} \leq a \text{ のとき } \boxed{\text{シ}}$$

である。

オの解答群

- Ⓐ $tx - t^2$ Ⓑ $tx - 2t^2$ Ⓒ $tx - 3t^2$ Ⓓ $2tx - t^2$ Ⓔ $2tx - 2t^2$ Ⓕ $2tx - 3t^2$

カ、キ、クの解答群

- Ⓐ -2 Ⓑ -1 Ⓒ 0 Ⓓ 1 Ⓔ 2 Ⓕ $x-1$ Ⓖ $x-2$
 Ⓗ $x-3$ Ⓙ $2x-1$ Ⓚ $2x-2$ Ⓛ $2x-3$ Ⓛ x^2-1 Ⓜ x^2 Ⓝ x^2+1
 Ⓞ $2x^2-1$ Ⓟ $2x^2$ Ⓠ $2x^2+1$

ケ、コ、サ、シの解答群

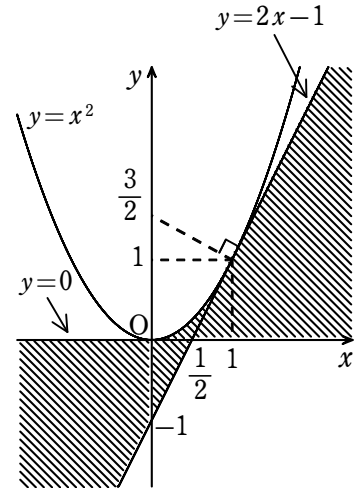
- Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ 1 Ⓓ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Ⓔ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ Ⓕ $-\frac{a+1}{\sqrt{5}}$
 Ⓖ $\frac{a+1}{\sqrt{5}}$ Ⓗ $-\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ Ⓙ $\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ Ⓛ $-a$ Ⓛ a Ⓝ $-2a$
 Ⓞ $2a$ Ⓟ $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$ Ⓠ $\sqrt{a+\frac{1}{4}}$ Ⓡ $\sqrt{a^2-2a+2}$

解答

$f(x)=x^2$ とすると $f'(x)=2x$ であるから、点 $P(t, t^2)$ における接線 l の方程式は

$y - t^2 = 2t(x - t)$ すなわち $y = 2tx - t^2$
 $t=0, 1$ のとき、 l はそれぞれ $y = 0$ (x 軸), $y = 2x - 1$ であり t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき l の変化を考えれば求める領域 D は右図の斜線部分となる。すなわち

$$\begin{aligned} x \leq 0 \text{ のとき} & \quad 2x-1 \leq y \leq 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} & \quad 2x-1 \leq y \leq x^2, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき} & \quad 0 \leq y \leq x^2, \\ 1 \leq x & \quad 0 \leq y \leq 2x-1 \end{aligned}$$



(注) 問題文に

「 x を固定して $y=2tx-t^2$ を t の関数とみなし、 $0 \leq t \leq 1$ のときに y のとりうる値の範囲を調べればよい」とあり、それが厳密だと思いが、限られた時間とマーク解答を考えると、上図をもとに答えることを薦めたい。

後半 $0 < a < \frac{3}{2}$ のとき、 AQ が最小となるのは、 Q が O である場合と、 O 以外の放物線上である場合がある。

その境界が $a = \frac{1}{2}$, これがヒントになっている。

AQ の長さの最小値 d について

$a \leq -1$ または $\frac{3}{2} \leq a$ のとき、 A と直線 $y=2x-1$ ($2x-y-1=0$) の距離が最小値であるから

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - a - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$$

したがって、 $a \leq -1$ のとき $d = -\frac{a+1}{\sqrt{5}}$, $\frac{3}{2} \leq a$ のとき $d = \frac{a+1}{\sqrt{5}}$

$-1 \leq a \leq 0$ のとき、 $d = 0$

$0 < a < \frac{3}{2}$ のとき、 $A(0, a)$ が中心で半径 r の円と放物線 $y=x^2$ が接するとき、その r が AQ の最小値である。

$x^2 + (y-a)^2 = r^2$ と $y=x^2$ が接する

$\Leftrightarrow y + (y-a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$ が $y \geq 0$ であるただ1つの実数解をもつ

$\textcircled{1}$ から $y^2 - (2a-1)y + a^2 - r^2 = 0 \dots \textcircled{2}$ すなわち $\left\{y - \left(a - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + a - \frac{1}{4} - r^2 = 0$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $\textcircled{2}$ のただ1つの実数解は $y=0$ で、このとき $r=a$ すなわち $d=a$

$\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$ のとき、 $y = a - \frac{1}{2}$ が重解で、このとき $r = d = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$