

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。  
ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

点  $P(t, t^2)$  における放物線  $y=x^2$  の接線を  $\ell$  とすると、 $\ell$  の方程式は  $y = \boxed{\text{オ}}$  である。 $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲を動くときに  $\ell$  が通過する領域を  $D$  とする。 $D$  を図示するには、 $x$  を固定して  $y = \boxed{\text{オ}}$  を  $t$  の関数とみなし、 $0 \leq t \leq 1$  のときに  $y$  のとりうる値の範囲を調べればよい。すると、

$$x \leq 0 \text{ のとき } \boxed{\text{カ}} \leq y \leq \boxed{\text{キ}},$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } \boxed{\text{カ}} \leq y \leq \boxed{\text{ク}},$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき } \boxed{\text{キ}} \leq y \leq \boxed{\text{ク}},$$

$$1 \leq x \text{ のとき } \boxed{\text{キ}} \leq y \leq \boxed{\text{カ}}$$

である。

次に、 $a$  を定数とし、点  $(0, a)$  を  $A$  とする。点  $Q$  が領域  $D$  上を動くとき、線分  $AQ$  の長さの最小値は

$$a \leq -1 \text{ のとき } \boxed{\text{ケ}},$$

$$-1 \leq a \leq 0 \text{ のとき } 0,$$

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } \boxed{\text{コ}},$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \text{ のとき } \boxed{\text{サ}},$$

$$\frac{3}{2} \leq a \text{ のとき } \boxed{\text{シ}}$$

である。

オの解答群

- Ⓐ  $tx - t^2$    Ⓑ  $tx - 2t^2$    Ⓒ  $tx - 3t^2$    Ⓓ  $2tx - t^2$    Ⓔ  $2tx - 2t^2$    Ⓕ  $2tx - 3t^2$

カ、キ、クの解答群

- Ⓐ  $-2$    Ⓑ  $-1$    Ⓒ  $0$    Ⓓ  $1$    Ⓔ  $2$    Ⓕ  $x-1$    Ⓖ  $x-2$   
 Ⓗ  $x-3$    Ⓙ  $2x-1$    Ⓚ  $2x-2$    Ⓛ  $2x-3$    Ⓛ  $x^2-1$    Ⓜ  $x^2$    Ⓝ  $x^2+1$   
 Ⓞ  $2x^2-1$    Ⓟ  $2x^2$    Ⓠ  $2x^2+1$

ケ、コ、サ、シの解答群

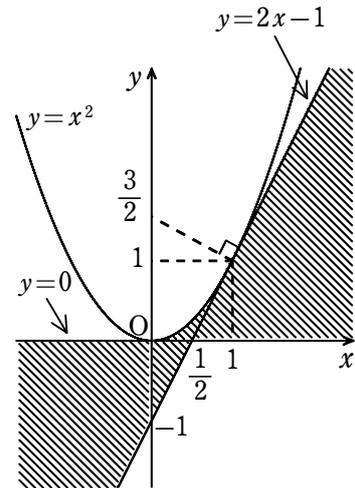
- Ⓐ  $\frac{1}{2}$    Ⓑ  $\frac{\sqrt{3}}{2}$    Ⓒ  $1$    Ⓓ  $\frac{\sqrt{5}}{2}$    Ⓔ  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$    Ⓕ  $-\frac{a+1}{\sqrt{5}}$   
 Ⓖ  $\frac{a+1}{\sqrt{5}}$    Ⓗ  $-\frac{a+1}{\sqrt{3}}$    Ⓙ  $\frac{a+1}{\sqrt{3}}$    Ⓚ  $-a$    Ⓛ  $a$    Ⓝ  $-2a$   
 Ⓞ  $2a$    Ⓟ  $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$    Ⓠ  $\sqrt{a+\frac{1}{4}}$    Ⓡ  $\sqrt{a^2-2a+2}$

解答

$f(x)=x^2$  とすると  $f'(x)=2x$  であるから、点  $P(t, t^2)$  における接線  $l$  の方程式は

$y - t^2 = 2t(x - t)$  すなわち  $y = 2tx - t^2$   
 $t=0, 1$  のとき、 $l$  はそれぞれ  $y = 0$  ( $x$  軸),  $y = 2x - 1$  であり  $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき  $l$  の変化を考えれば求める領域  $D$  は右図の斜線部分となる。すなわち

$$\begin{aligned} x \leq 0 \text{ のとき} & \quad 2x-1 \leq y \leq 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} & \quad 2x-1 \leq y \leq x^2, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき} & \quad 0 \leq y \leq x^2, \\ 1 \leq x & \quad 0 \leq y \leq 2x-1 \end{aligned}$$



(注) 問題文に

「 $x$  を固定して  $y = 2tx - t^2$  を  $t$  の関数とみなし、 $0 \leq t \leq 1$  のときに  $y$  のとりうる値の範囲を調べればよい」とあり、それが厳密だと思いが、限られた時間とマーク解答を考えると、上図をもとに答えることを薦めたい。

後半  $0 < a < \frac{3}{2}$  のとき、 $AQ$  が最小となるのは、 $Q$  が  $O$  である場合と、 $O$  以外の放物線上である場合がある。

その境界が  $a = \frac{1}{2}$ , これがヒントになっている。

$AQ$  の長さの最小値  $d$  について

$a \leq -1$  または  $\frac{3}{2} \leq a$  のとき、 $A$  と直線  $y = 2x - 1$  ( $2x - y - 1 = 0$ ) の距離が最小値であるから

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - a - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{5}}$$

したがって、 $a \leq -1$  のとき  $d = -\frac{a+1}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{3}{2} \leq a$  のとき  $d = \frac{a+1}{\sqrt{5}}$

$-1 \leq a \leq 0$  のとき、 $d = 0$

$0 < a < \frac{3}{2}$  のとき、 $A(0, a)$  が中心で半径  $r$  の円と放物線  $y = x^2$  が接するとき、その  $r$  が  $AQ$  の最小値である。

$x^2 + (y - a)^2 = r^2$  と  $y = x^2$  が接する

$\Leftrightarrow y + (y - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$  が  $y \geq 0$  であるただ1つの実数解をもつ

$\textcircled{1}$  から  $y^2 - (2a - 1)y + a^2 - r^2 = 0 \dots \textcircled{2}$  すなわち  $\left\{y - \left(a - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + a - \frac{1}{4} - r^2 = 0$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$  のとき、 $\textcircled{2}$  のただ1つの実数解は  $y = 0$  で、このとき  $r = a$  すなわち  $d = a$

$\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$  のとき、 $y = a - \frac{1}{2}$  が重解で、このとき  $r = d = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$