

- 1 曲線  $y = x^2$  上に2点  $A(-2, 4)$ ,  $B(b, b^2)$  をとる。ただし  $b > -2$  とする。次の条件を満たす  $b$  の範囲を求めよ。

条件:  $y = x^2$  上の点  $T(t, t^2)$  ( $-2 < t < b$ ) で、 $\angle ATB$  が直角になるものが存在する。

解答  $\overrightarrow{TA} = (-2-t, 4-t^2)$ ,  $\overrightarrow{TB} = (b-t, b^2-t^2)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} &= (-2-t)(b-t) + (4-t^2)(b^2-t^2) \\ &= (t+2)(t-b) \{1+(t-2)(t+b)\} \end{aligned}$$

$\angle ATB$  が直角になるのは、 $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 0$  および  $-2 < t < b$  から

$$1+(t-2)(t+b) = 0 \quad \text{すなわち}$$

$$t^2 + (b-2)t - 2b + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{①}$$

のときである。よって問題の条件の同値条件は、 $t$  の2次方程式①が

$$-2 < t < b$$

の範囲に少なくとも1つ実数解をもつことである。

$$f(t) = t^2 + (b-2)t - 2b + 1 = \left(t - \frac{-b+2}{2}\right)^2 - \frac{b(b+4)}{4}$$

とおくと、 $y = f(t)$  のグラフが  $t$  軸の  $-2 < t < b$  の範囲に少なくとも1つ共有点をもつための条件を求めればよい。軸  $t = \frac{-b+2}{2}$  の位置で場合分けする。

- (i)  $\frac{-b+2}{2} \leq -2$  すなわち  $b \geq 6$   $\dots\dots$ ② のとき

$$f(-2) = -4b + 9 < 0 \quad \dots\dots \text{③} \quad \text{かつ} \quad f(b) = 2b^2 - 4b + 1 > 0 \quad \dots\dots \text{④}$$

$$\text{③ から } b > \frac{9}{4} \quad \dots\dots \text{③'}$$

$$\text{④ から } (b-1)^2 > \frac{1}{2} \quad \text{よって } b < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{または} \quad \frac{2+\sqrt{2}}{2} < b \quad \dots\dots \text{④'}$$

$$\text{②, ③', ④' の共通部分から } b \geq 6 \quad \dots\dots (*)$$

- (ii)  $-2 < \frac{-b+2}{2} < b$  すなわち  $\frac{2}{3} < b < 6$   $\dots\dots$ ⑤ のとき

$$f\left(\frac{-b+2}{2}\right) = -\frac{b(b+4)}{4} \leq 0 \quad \dots\dots \text{⑥} \quad \text{かつ} \quad [f(-2) > 0 \quad \text{または} \quad f(b) > 0] \quad \dots\dots \text{⑦}$$

$$\text{⑥ から } b \geq 0 \quad \dots\dots \text{⑥'}, \quad \text{⑦ から } b \text{ は任意} \quad \dots\dots \text{⑦'}$$

$$\text{⑤, ⑥', ⑦' の共通部分から } \frac{2}{3} < b < 6 \quad \dots\dots (**)$$

- (iii)  $\frac{-b+2}{2} \leq b$  すなわち  $-2 < b \leq \frac{2}{3}$   $\dots\dots$ ⑧ のとき

$$f(-2) > 0 \quad \dots\dots \text{⑨} \quad \text{かつ} \quad f(b) < 0 \quad \dots\dots \text{⑩}$$

$$\text{⑨ から } b < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \text{⑨'}, \quad \text{⑩ から } \frac{2-\sqrt{2}}{2} < b < \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \text{⑩'}$$

$$\text{⑧, ⑨', ⑩' の共通部分から } \frac{2-\sqrt{2}}{2} < b \leq \frac{2}{3} \quad \dots\dots (***)$$

したがって (\*), (\*\*), (\*\*\*) から  $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < b$   $\dots\dots$ (答)

