

5 [I] 平面上の2つのベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は零ベクトルではなく、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角度は  $60^\circ$  である。このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

解答 
$$r^2 = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|^2}{|2\vec{a} + \vec{b}|^2} = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})}{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})} = \frac{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2}$$

$$|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b \text{ とおくと, } \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 60^\circ = \frac{1}{2}ab$$

また  $\frac{b}{a} = x$  とおくと、 $x$  は正ですべての実数値をとり

$$r^2 = \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{4a^2 + 2ab + b^2} = \frac{1 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4} = 4 - \frac{3(2x+5)}{x^2 + 2x + 4}$$

ここで  $\frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 5} = t$  とおくと  $r^2 = 4 - \frac{3}{t}$  ……① であり

$$x^2 - 2(t-1)x - 5t + 4 = 0 \text{ ……②}$$

$x$  の2次方程式②が  $x > 0$  の範囲に少なくとも1つの実数解をもつような  $t$  の値の範囲を求める。

$$f(x) = x^2 - 2(t-1)x - 5t + 4$$

とおくと  $f(x) = \{x - (t-1)\}^2 - t^2 - 3t + 3$  また  $f(0) = -5t + 4$

(i)  $-5t + 4 < 0$  すなわち  $t > \frac{4}{5}$  のとき

$f(0) < 0$  だから  $y = f(x)$  のグラフは  $x$  軸の正の部分と1つの共有点をもつ、すなわち②は  $x > 0$  の範囲に1つの実数解をもつ。

(ii)  $t \leq \frac{4}{5}$  のとき

放物線  $y = f(x)$  の軸は  $y = t - 1 \leq -\frac{1}{5}$  であり、 $f(0) \geq 0$  であるから、 $x > 0$  の範囲に共有点はない。

(i), (ii) から  $t > \frac{4}{5}$  よって  $0 < \frac{1}{t} < \frac{5}{4}$

①より  $4 - 3 \cdot \frac{5}{4} < r^2 < 4$  すなわち  $\frac{1}{4} < r^2 < 4$  したがって  $\frac{1}{2} < r < 2$  ……(答)

補足 数学Ⅲの範囲では  $g(x) = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4}$  が  $x > 0$  で増加関数であり

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 4$$

であることから  $\frac{1}{4} < r^2 < 4$  がいえる。図形的に極限を考えると  $\frac{1}{2} < r < 2$  が予想できる。