

5 [I] 平面上の2つのベクトル \vec{a} と \vec{b} は零ベクトルではなく、 \vec{a} と \vec{b} のなす角度は 60° である。このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

解答
$$r^2 = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|^2}{|2\vec{a} + \vec{b}|^2} = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})}{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})} = \frac{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2}$$

$$|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b \text{ とおくと, } \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 60^\circ = \frac{1}{2}ab$$

また $\frac{b}{a} = x$ とおくと、 x は正ですべての実数値をとり

$$r^2 = \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{4a^2 + 2ab + b^2} = \frac{1 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4} = 4 - \frac{3(2x+5)}{x^2 + 2x + 4}$$

ここで $\frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 5} = t$ とおくと $r^2 = 4 - \frac{3}{t}$ ……① であり

$$x^2 - 2(t-1)x - 5t + 4 = 0 \text{ ……②}$$

x の2次方程式②が $x > 0$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつような t の値の範囲を求める。

$$f(x) = x^2 - 2(t-1)x - 5t + 4$$

とおくと $f(x) = \{x - (t-1)\}^2 - t^2 - 3t + 3$ また $f(0) = -5t + 4$

(i) $-5t + 4 < 0$ すなわち $t > \frac{4}{5}$ のとき

$f(0) < 0$ だから $y = f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と1つの共有点をもつ、すなわち②は $x > 0$ の範囲に1つの実数解をもつ。

(ii) $t \leq \frac{4}{5}$ のとき

放物線 $y = f(x)$ の軸は $y = t - 1 \leq -\frac{1}{5}$ であり、 $f(0) \geq 0$ であるから、 $x > 0$ の範囲に共有点はない。

(i), (ii) から $t > \frac{4}{5}$ よって $0 < \frac{1}{t} < \frac{5}{4}$

①より $4 - 3 \cdot \frac{5}{4} < r^2 < 4$ すなわち $\frac{1}{4} < r^2 < 4$ したがって $\frac{1}{2} < r < 2$ ……(答)

補足 数学Ⅲの範囲では $g(x) = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4}$ が $x > 0$ で増加関数であり

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 4$$

であることから $\frac{1}{4} < r^2 < 4$ がいえる。図形的に極限を考えると $\frac{1}{2} < r < 2$ が予想できる。