

② 2つの複素数 w, z ($z \neq 0$) の間に

$$w = z - \frac{7}{4z}$$

という関係がある。ここで $w = x + yi$ (x, y は実数, i は虚数単位) と表すとき, 以下の間に答えよ。

- (1) 複素数平面上で z が原点 O を中心として半径 $\frac{7}{2}$ の円周上を動くとする。このとき w が描く曲線 C を座標平面上の x と y の方程式で表示せよ。
- (2) (略)

解答 z の偏角を θ とすると, z が原点 O を中心として半径 $\frac{7}{2}$ の円周上を動くから

$$z = \frac{7}{2} \cos \theta + \frac{7}{2} i \sin \theta$$

と表される。これから

$$\begin{aligned} w &= \frac{7}{2} \cos \theta + \frac{7}{2} i \sin \theta - \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \frac{7}{2} \cos \theta + \frac{7}{2} i \sin \theta - \frac{1}{2} (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= 3 \cos \theta + 4 i \sin \theta \end{aligned}$$

よって $w = x + yi$ から

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 4 \sin \theta$$

θ を消去して, w が描く曲線 C の方程式は

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

であり, これは楕円を表す。