

## 第3問

複素数平面上の原点以外の点  $z$  に対して、 $w = \frac{1}{z}$  とする。

- (1)  $\alpha$  を 0 でない複素数とし、点  $\alpha$  と原点  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分線を  $L$  とする。  
点  $z$  が直線  $L$  上を動くとき、点  $w$  の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを  $\beta$  とする。点  $\beta$  と点  $\beta^2$  を結ぶ線分上を点  $z$  が動くときの点  $w$  の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

## 略 解

- (1) 点  $z$  が直線  $L$  上にあるとき  $|z| = |z - \alpha|$

$$w \neq 0 \text{ であるから } z = \frac{1}{w} \text{ を用いて } z \text{ を消去すると } \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

点  $w$  の軌跡は原点を除く中心  $\frac{1}{\alpha}$ 、半径  $\frac{1}{|\alpha|}$  の円。

- (2) 点  $\beta$  と点  $\beta^2$  を結ぶ線分は点  $-1$  と原点  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分線のうちの単位円の内部であるから (1) のおいて  $\alpha = -1$  および  $|z| \leq 1$

$$\text{したがって } |w+1|=1, |w| \geq 1$$

すなわち 中心  $-1$ 、半径  $1$  の円のうちの単位円の外部。