

第5問

複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。 $w = \frac{1}{1-u}$ とおき、 w と共役な複素数を \bar{w} で表す。

- (1) u と $\frac{\bar{w}}{w}$ を z についての整式として表し、絶対値の商 $\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$ を求めよ。
- (2) C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

解

- (1) AQ の中点を $M\left(\frac{u+1}{2}\right)$ とする。 P は A と異なるから $AQ \neq 0$ また $PM \neq 0$ である。

$OP \parallel AQ$ であるから $\frac{u-1}{z}$ は実数、よって

$$\frac{u-1}{z} = \frac{\bar{u}-1}{z} \quad \dots\dots ①$$

$OP \perp PM$ であるから $\frac{u+1}{2} - z$ は純虚数、よって

$$\frac{u+1}{2z} - 1 = -\left(\frac{\bar{u}+1}{2z} - 1\right) \quad \text{すなわち} \quad \frac{u+1}{z} = -\frac{\bar{u}+1}{z} + 4 \quad \dots\dots ②$$

①+② から $\frac{\bar{u}}{z}$ を消去する。ここで $OP=1$ から $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ を用いる。

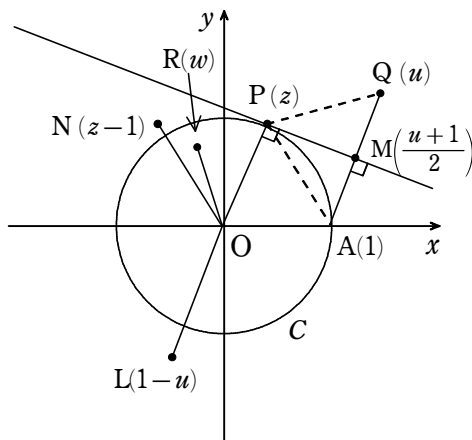
$$\frac{2u}{z} = -\frac{2}{z} + 4 \quad \text{から} \quad u = -\frac{z}{z} + 2z = -z^2 + 2z \quad \dots\dots(\text{答})$$

$1-u = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$ から

$$\frac{\bar{w}}{w} = \frac{1-u}{1-\bar{u}} = \frac{(z-1)^2}{(\bar{z}-1)^2} = \frac{z^2(z-1)^2}{(\bar{z}\bar{z}-z)^2} = z^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$\frac{w + \bar{w} - 1}{w} = 1 + \frac{\bar{w}}{w} - \frac{1}{w} = 1 + z^2 - (1-u) = 1 + z^2 - (z-1)^2 = 2z$ から

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = \left| \frac{w + \bar{w} - 1}{w} \right| = 2|z| = 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$



補足

$\triangle OAP$ と $\triangle PAQ$ は相似な二等辺三角形、 \overline{PA} を $\text{Arg}(z)$ だけ回転したものが \overline{PQ} であるから $u - z = z(1 - z)$ よって $u = 2z - z^2$

$$(2) \quad \frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = 2 \quad \text{から} \quad \left| \frac{w + \bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right| = |w|$$

x, y を実数として $w = x + yi$ とすると

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

両辺を平方して整理すると

$$x = \frac{1}{4} - y^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

これは座標平面上で x 軸を軸とする放物線を表す。

$P(z)$ が C' 上を動くとき $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{3}$

$$w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{(z-1)^2} \quad \text{から}$$

$$\text{Arg}(w) = -2 \text{Arg}(z-1)$$

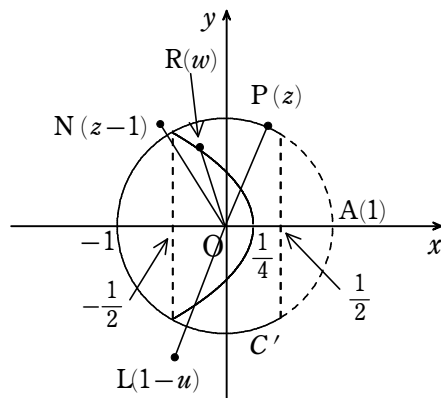
であるから、偏角の変化は右表のようになる。

$\text{Arg}(w) = \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ となる w はそれぞれ

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

以上から求める軌跡の方程式は

$$x = \frac{1}{4} - y^2 \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \dots\dots \text{(答)}$$



$\text{Arg}(z)$	$\frac{\pi}{3}$	\rightarrow	$\frac{5\pi}{3}$
$\text{Arg}(z-1)$	$\frac{2\pi}{3}$	\rightarrow	$\frac{4\pi}{3}$
$\text{Arg}(w)$	$-\frac{4\pi}{3}$	\rightarrow	$-\frac{8\pi}{3}$
	$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	減少	$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

補足

点 $\frac{1}{2}$ を通り x 軸(実軸)に垂直な直線を ℓ とする。点 $R(w)$ から ℓ に

ひいた垂線の交点を H とすると $\left| \frac{w + \bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right| = |w|$ は

$RH = RO$ を表す。したがって点 R は、焦点 O , 準線 ℓ の放物線を描く。

