

5 α を複素数とする。複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \dots\dots ①$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき、点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。
- (2) 方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき、点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

解 $z=0$ は ① の解ではないから $z \neq 0$ としてよい。よって

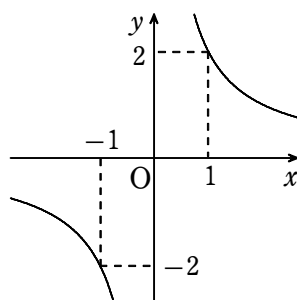
$$\alpha = z + \frac{2i}{z} \quad \dots\dots ②$$

- (1) t を 0 でない実数として $\alpha = t + \frac{2i}{t}$ のとき ② は実数解

$z=t$ をもつ。 $\alpha = x + yi$ (x, y は実数) とすると

$$x = t, \quad y = \frac{2}{t}, \quad t \text{ を消去すると } y = \frac{2}{x}$$

x は 0 以外の実数をとるから、点 α は双曲線 $y = \frac{2}{x}$ を描く。



- (2) 原点を中心とする $\frac{\pi}{4}$ 回転を表す複素数を w とすると

$$w = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{また } |w|=1, \quad w^2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

点 z を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点を z' とすると $z' = wz, |z'| = |w||z| = |z|$

$$② \times w \text{ より } w\alpha = wz + \frac{2iw^2}{wz} \text{ よって } \beta = z' - \frac{2}{z'}$$

ここで $\beta = x + yi$ (x, y は実数), $z' = \cos \theta + i \sin \theta$...③

とおくと

$$x + yi = (\cos \theta + i \sin \theta) - 2(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\text{よって } x = -\cos \theta, \quad y = 3\sin \theta \quad \dots\dots ④$$

$$③ \text{ から } \theta \text{ を消去すると } x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \dots\dots ⑤$$

点 β が曲線 ⑤ 上にあるとき、④、③を通して z' から解 z が存在する。

したがって点 β は楕円 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ を描く。

