

解

- 1 (1) ①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とする。①, ② がいずれも実数解をもたないとき

$$D_1 = a^2 - 4 < 0, D_2 = b^2 - 8 < 0 \quad \text{よって} \quad -2 < a < 2, -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

この条件のもとで, ①, ② の解はそれぞれ

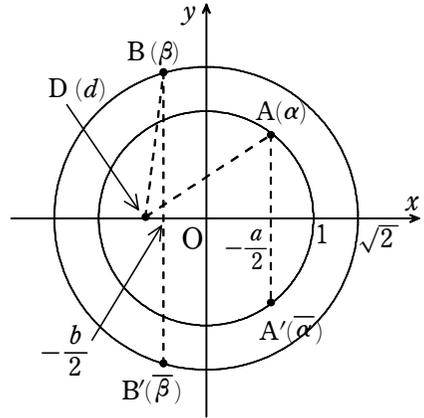
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{4 - a^2} i}{2}, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{8 - b^2} i}{2}$$

である。これらを

$$\alpha = -\frac{a}{2} + \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} i, \quad \bar{\alpha} = -\frac{a}{2} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} i$$

$$\beta = -\frac{b}{2} + \sqrt{2 - \frac{b^2}{4}} i, \quad \bar{\beta} = -\frac{b}{2} - \sqrt{2 - \frac{b^2}{4}} i$$

とおく。複素数平面上で $A(\alpha), A'(\bar{\alpha}), B(\beta), B'(\bar{\beta})$ とすると A と A', B と B' はそれぞれ異なる点であり, 実軸に関して対称である。また, A と A' は原点中心, 半径 1 の円周上に, B と B' は原点中心, 半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある。



- (i) $-\frac{a}{2} = -\frac{b}{2}$ すなわち $a = b$ のとき

4点 A, A', B, B' は点 $-\frac{a}{2}$ を通り実軸に垂直な直線上にある。

- (ii) $-\frac{a}{2} \neq -\frac{b}{2}$ すなわち $a \neq b$ のとき

AB の垂直二等分線と実軸との交点を $D(d)$ とすると

$$DA = DA' = DB = DB'$$

であるから, 4点 A, A', B, B' は D を中心とする同一円周上にある。

このとき $DA^2 = DB^2$ であるから

$$\left(-\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = \left(-\frac{b}{2} - d\right)^2 + \left(\sqrt{2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2$$

$$\text{よって} \quad d = \frac{1}{a-b} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$DA^2 = ad + d^2 + 1 = \frac{a}{a-b} + \left(\frac{1}{a-b}\right)^2 + 1 = \frac{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}{(a-b)^2}$$

したがって, 中心は $\frac{1}{a-b}$, 半径は $\frac{\sqrt{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}}{|a-b|}$ である。

(2) ③ の判別式を D_3 とすると実数解をもたないためには

$$D_3 = c^2 - 12 < 0 \quad \text{よって} \quad -2\sqrt{3} < c < 2\sqrt{3}$$

このとき解は $x = \frac{-c \pm \sqrt{12 - c^2} i}{2}$ である。

$$r = -\frac{c}{2} + \sqrt{3 - \frac{c^2}{4}} i, \quad \bar{r} = -\frac{c}{2} - \sqrt{3 - \frac{c^2}{4}} i$$

とおき、 $C(r)$, $C(\bar{r})$ とすると、 C , C' が (1) の円周上にあるためには

$$c \neq a, \quad c \neq b \quad \dots\dots ④$$

$$DA^2 = DC^2 \quad \text{から} \quad \left(-\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = \left(-\frac{c}{2} - d\right)^2 + \left(\sqrt{3 - \frac{c^2}{4}}\right)^2$$

$$\text{よって} \quad d = \frac{2}{a - c}$$

これと ③ から $\frac{1}{a - b} = \frac{2}{a - c}$ したがって $a - 2b + c = 0$

a , b , c はこの順に等差数列をつくるから、 $a \neq b$ ならば ④ が成り立つ。

以上から求める必要十分条件は

$$-2 < a < 2, \quad -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{3} < c < 2\sqrt{3}, \quad a \neq b, \quad a - 2b + c = 0$$